第三分册目次

第四章　多變數函數和方陣函數

81. 正則多變數函數　就基本概念而論，多變數的解析函數論和單變數函數論很是相似。但是進一步發展下去，他就有了一些特異之點。在這一章裏我們祇說些基本概念，並且對多變數的冪級數作較詳細的研究。爲簡單計，我們祇看兩個自變數的情形。當自變數多於兩個時，所有的定義和證明完全有效。

假設 z_1 和 z_2 是兩個複變數，

$$f(z_1, z_2) \tag{1}$$

是這兩個變數的函數。假設變數 z_1 在一區域 B_1 中變動，變數 z_2 在一區域 B_2 中變動。如果函數(1)是 z_1 和 z_2 的單值連續函數，並且對於在上述區域中的自變數的任何值，比率

$$\frac{f(z_1+\Delta z_1, z_2)-f(z_1, z_2)}{\Delta z_1} \text{ 和 } \frac{f(z_1, z_2+\Delta z_2)-f(z_1, z_2)}{\Delta z_2}$$

當複改變量 Δz_1 和 Δz_2 趨於零時常有一定的極限，則稱函數(1)爲 z_1 和 z_2 在區域 B_1 和 B_2 中的正則函數或全純函數。這兩比率的極限即函數(1)關於 z_1 和 z_2 的偏導數：

$$\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1} \text{ 和 } \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}。$$

82. 二重積分和勾犀公式　假設 l_1 和 l_2 依次爲區域 B_1 和 B_2 中的兩條線路。將函數 $f(z_1, z_2)$ 先沿 l_1 作路積分，再沿 l_2 作路積分，即得二重積分

$$I_1=\int_{l_2} dz_2 \int_{l_1} f(z_1, z_2) dz_1。$$

如果交換積分的次序，則可得另一二重積分：

$$I_2=\int_{l_2}dz_1\int_{l_1}f(z_1,z_2)dz_2。$$

首先，我們證明 I_1 和 I_2 相等。假設曲線 l_1 的參數方程爲

$$z_1(t)=x_1(t)+iy_1(t), \qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

曲線 l_2 的參數方程爲

$$z_2(\tau)=x_2(\tau)+iy_2(\tau)。\qquad (c\leqslant \tau\leqslant d)$$

以 $z_1=z_1(t)$ 和 $z_2=z_2(\tau)$

代入函數 $f(z_1,z_2)$ 中，可以把積分 I_1 變成一個關於兩變數 t 和 τ 的二重積分，其中第一次關於 t 的積分以常數 a 和 b 爲積分限。第二次關於 τ 的積分以常數 c 和 d 爲積分限。

$$I_1=\int_c^d[x_2'(\tau)+iy_2'(\tau)]d\tau\int_a^b f[z_1(t),z_2(\tau)][x_1'(t)+iy_1'(t)]dt。$$

這積分顯然就相當於在 (t,τ) 平面上的長方形

$$a\leqslant t\leqslant b;\quad c\leqslant \tau\leqslant d$$

中的二重積分。故由 [II, 78] 可以不變積分的極限而將次序交換，即 I_1 可改寫爲：

$$I_1=\int_a^b[x_1'(t)+iy_1'(t)]dt\int_c^d f[z_1(t),z_2(\tau)][x_2'(\tau)+iy_2'(\tau)]d\tau,$$

而這積分顯然就相當於積分 I_2，因此知道 I_1 和 I_2 相等。他們的共同數值稱爲函數 $f(z_1,z_2)$ 沿線路 l_1 和 l_2 的二重積分。

我們也可以直接用和的極限來定義二重積分。以分點

$$z_1^{(0)},\ z_1^{(1)},\ z_1^{(2)},\ \cdots,\ z_1^{(m)}$$

將曲線 l_1 分成 m 段，又以分點

$$z_2^{(0)},\ z_2^{(1)},\ z_2^{(2)},\ \cdots,\ z_2^{(n)}$$

將曲線 l_2 分成 n 段。再作二重和

$$\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}f(\xi_1^{(p)},\xi_2^{(q)})(z_1^{(p+1)}-z_1^{(p)})(z_2^{(q+1)}-z_2^{(q)}),$$

其中 $\xi_1^{(p)}$ 是曲線 l_1 上弧 $z_1^{(p)}z_1^{(p+1)}$ 中的一點，$\xi_2^{(q)}$ 是曲線 l_2 上弧 $z_2^{(q)}z_2^{(q+1)}$

中的一點。當兩曲線上的分點無限增多，並且諸小段的弧長都趨於零時，上記二重和的極限即二重積分 I_1 或 I_2。

假設 l_1 和 l_2 是兩條簡單閉線路，其所圍之區域爲 B_1 和 B_2。又設函數 $f(z_1, z_2)$在閉區域 B_1 和 B_2 中爲正則，就是說，這函數在兩個更大一些的，包含 B_1 和 B_2 以及他們的境界線在其內部的區域中爲正則。考察二重積分

$$I=\int_{l_1} dz_1'\int_{l_2}\frac{f(z_1',z_2')}{(z_1'-z_1)(z_2'-z_2)}dz_2'$$

或

$$I=\int_{l_2} dz_2'\int_{l_1}\frac{f(z_1',z_2')}{(z_1'-z_1)(z_2'-z_2)}dz_1',$$

其中 z_1 和 z_2 是 B_1 和 B_2 內部的兩個定點。

當先沿線路 l_2 積分時 z_1' 可視爲一參數，表示 l_1 上一定點。這時 $f(z_1', z_2')$是一個複變數 z_2' 的函數，他在閉區域 B_2 中爲正則。故應用通常的勾犀公式可得

$$I=2\pi i\int_{l_1}\frac{f(z_1',z_2)}{z_1'-z_1}dz_1'。$$

這時 $f(z_1', z_2)$是 z_1' 在閉區域 B_1 中的正則函數了。再用一次勾犀公式卽得

$$I=-4\pi^2 f(z_1,z_2),$$

因此得到和勾犀公式類似的公式：

$$(2)\qquad f(z_1,z_2)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{l_1}dz_1'\int_{l_2}\frac{f(z_1',z_2')}{(z_1'-z_1)(z_2'-z_2)}dz_2'。$$

變數 z_1 和 z_2 在積分符號之內以參數的形式出現。關於這些參數微分後，可知 $f(z_1,z_2)$有任何階的導數，並且這些導數可以表示爲二重積分的形式：

$$(3)\qquad \frac{\partial^{p+q}f(z_1,z_2)}{\partial z_1^p\,\partial z_2^q}=-\frac{p!\,q!}{4\pi^2}\int_{l_1}dz_1'\int_{l_2}\frac{f(z_1',z_2')}{(z_1'-z_1)^{p+1}(z_2'-z_2)^{q+1}}dz_2'。$$

所有以上的論斷和結果很容易推廣到含有兩個以上的自變數的

函數去。

和單變數函數的情形一樣，由勾犀公式可以導出模數原理：若函數 $f(z_1, z_2)$ 在閉區域 B_1 和 B_2 中爲正則，又當 z_1' 在 l_1 上，z_2' 在 l_2 上時 $|f(z_1', z_2')| \leqslant M$，則對閉區域 B_1 和 B_2 中的任意兩點 z_1 和 z_2，常有 $|f(z_1, z_2)| \leqslant M$。

完全和單變數函數的情形一樣，可證維爾史特拉斯定理成立：若級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z_1, z_2)$$

的項都是閉區域 B_1 和 B_2 中的正則函數，並且級數在這兩區域中一致收斂，則其和爲兩區域內部的正則函數，且當 z_1 和 z_2 爲 B_1 和 B_2 的內點時，級數可以關於 z_1 和 z_2 逐項微分任何次之多。微分後所得到的級數在 B_1 和 B_2 內部的任意閉區域 B_1' 和 B_2' 中爲一致收斂。所有以上的論斷和結果不難推廣到含有兩個以上的自變數的函數去。我們以下專來研究冪級數。

83. 冪級數 含兩個自變數 z_1 和 z_2 且以 b_1 和 b_2 爲中心的冪級數具有如下的形式：

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{pq}(z_1 - b_1)^p (z_2 - b_2)^q, \tag{4}$$

其中 p 和 q 互相獨立各自從零開始跑過正整數的全體。級數(4)是個二重級數。這種級數我們早在 [I, 142] 中已經研究過，那時級數的項都是實數。現在假設由這級數的項的模所成的級數

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} |a_{pq}| \, |z_1 - b_1|^p |z_2 - b_2|^q \tag{5}$$

也收斂。那末，如[11]中一般，可知由級數(4)的項的實數部分和虛數部分所成的級數皆爲絕對收斂，並且這兩個實二重級數的和不因項的次序的變更而改變。故知當級數(5)收斂時級數(4)也收斂，並且不論項的次序如何變更，級數(4)的和常爲一定。以後我們祇看級數(5)

爲收斂，即級數(4)爲絕對收斂的情形。

和 [13] 中完全一樣，不難寫出與亞貝爾定理類似的定理來。假設級數(4)當 $z_1=\alpha_1$，$z_2=\alpha_2$ 時爲絕對收斂。由此可知當 $z_1=\alpha_1$，$z_2=\alpha_2$ 時級數(4)的一般項的模爲有界，就是說，存在一數 M，使對任意的 p 和 q 不等式

$$|a_{pq}|\,|\alpha_1-b_1|^p\,|\alpha_2-b_2|^q<M$$

常常成立。上式即

$$|a_{pq}|<\frac{M}{|\alpha_1-b_1|^p|\alpha_2-b_2|^q}。\tag{6}$$

現在來看兩個圓 K_1 和 K_2：

$$|z_1-b_1|<|\alpha_1-b_1|;\quad |z_2-b_2|<|\alpha_2-b_2|。\tag{7}$$

第一個圓包含所有和 b_1 相距較 α_1 和 b_1 相距爲近的點 z_1，第二個圓包含所有和 b_2 相距較 α_2 和 b_2 相距爲近的點 z_2。

今於 K_1 中任取一點 z_1，K_2 中任取一點 z_2，即

$$|z_1-b_1|=q_1|\alpha_1-b_1|,\quad |z_2-b_2|=q_2|\alpha_2-b_2|,$$

其中 $0<q_1$，$q_2<1$。應用(6)可以估計級數(4)的一般項：

$$|a_{pq}|\,|z_1-b_1|^p\,|z_2-b_2|^q<Mq_1^p\,q_2^q。\tag{8}$$

但是易見正項二重級數

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}Mq_1^p\,q_2^q$$

爲收斂。實際上，這級數可由兩個正項級數

$$M(1+q_1+q_1^2+\cdots)\ \text{和}\ (1+q_2+q_2^2+\cdots)$$

相乘而得 [I, 138]，故顯知其和爲：

$$\frac{M}{(1-q_1)(1-q_2)}。$$

因此這時級數(5)收斂，從而級數(4)爲絕對收斂。由(8)式還可以知道在任何以 b_1 和 b_2 爲中心，半徑 ρ_1 和 ρ_2 依次小於 K_1 和 K_2 的半徑的圓 K_1' 和 K_2' 中，級數(4)爲一致收斂。在以上的證明中我們並沒

有用到級數(4)在 $z_1=a_1$ 和 $z_2=a_2$ 的絕對收斂性,而祇用到不等式

$$|a_{pq}(a_1-b_1)^p(a_2-b_2)^q|\leqslant M,$$

卽這級數的一般項當 $z_1=a_1$ 和 $z_2=a_2$ 時爲有界。

總括起來,可得下面的結果:若當 $z_1=a_1$, $z_2=a_2$ 時級數(4)的項的模都小於同一數 M, 則此級數在圓(7)的內部爲絕對收斂,在圓

$$|z_1-b_1|\leqslant(1-\varepsilon)|a_1-b_1|;\quad |z_2-b_2|\leqslant(1-\varepsilon)|a_2-b_2|$$

中爲一致收斂,其中 ε 是任何一個小的固定正數。

注意:祇要當 $z_1=a_1$ 和 $z_2=a_2$ 時級數(4)在某種順序之下相加爲收斂(不必絕對收斂),他的一般項就按與原點距離的遠近而趨於零,因此他們的絕對值必皆小於同一數 M。從而級數就在圓(7)內部絕對收斂。

由以上的結果,和[13]中完全一樣,可以導入級數(4)的收斂半徑這個概念。

不過現在我們有了兩個正數 R_1 和 R_2, 使當 $|z_1-b_1|<R_1$ 和 $|z_2-b_2|<R_2$ 時級數(4)絕對收斂,當 $|z_1-b_1|>R_1$ 和 $|z_2-b_2|>R_2$ 時級數(4)發散。注意:現在級數(4)的絕對收斂區域必須由兩個收斂半徑 R_1 和 R_2 同時決定,而這兩半徑的大小一般不能各自獨立地決定,因爲一半徑的值常要受另一半徑的值的影響。當 R_1 減小時, R_2 有時可以增大。換句話說,現在我們祇能說聯合收斂半徑 R_1 和 R_2, 或聯合收斂圓。試以下之冪級數爲例:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(p+q)!}{p!\,q!}z_1^p z_2^q。\tag{9}$$

級數(5)現在成爲

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(p+q)!}{p!\,q!}|z_1|^p|z_2|^q。\tag{10}$$

在這級數中先把那些 $p+q$ 等於同一數 s 的項分別加在一起。由牛頓二項式公式知道這種項的和是

$$(|z_1|+|z_2|)^s,$$

從而(10)式可以改寫爲

$$\sum_{s=0}^{\infty}(|z_1|+|z_2|)^s,$$

由此立刻可知當且僅當 $|z_1|+|z_2|<1$ 時這級數爲收斂。這樣，級數(9)的聯合收斂半徑 R_1 和 R_2 就由等式 $R_1+R_2=1$ 來決定。若取 $R_1=\theta$, $0<\theta<1$，則有 $R_2=1-\theta$。再看第二個例子：

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}z_1^p z_2^q。$$

於此易見 $|z_1|<1$ 和 $|z_2|<1$ 是絕對收斂的充要條件，就是說，現在 $R_1=1$, $R_2=1$，兩收斂半徑各自獨立地可以決定。

由一致收斂性和維爾史特拉斯定理知道級數(4)在聯合收斂圓的內部表示兩變數 z_1 和 z_2 的正則函數 $f(z_1,z_2)$。和 [13] 中一樣，可知級數(4)在收斂圓內部可以關於任一變數微分任何次之多，並且這微分不改變收斂圓。

和[14]中一樣，微分幾次以後再置 $z_1=b_1$ 和 $z_2=b_2$，可得級數的係數的表示式：

$$a_{pq}=\frac{1}{p!\,q!}\frac{\partial^{p+q}f(z_1,z_2)}{\partial z_1^p\partial z_2^q}\bigg|_{z_1=b_1;\ z_2=b_2}, \tag{11}$$

卽級數(4)是函數 $f(z_1,z_2)$ 的泰勒級數。

若 R_1 和 R_2 是級數(4)的聯合收斂半徑，則當 $|z_1-b_1|\leqslant R_1-\varepsilon$ 及 $|z_2-b_2|\leqslant R_2-\varepsilon$ 時這級數絕對且一致收斂，其中 ε 是任何一個小的固定正數。由(3)及(11)可得級數的係數的估值如下：

$$|a_{pq}|<\frac{M}{(R_1-\varepsilon)^p(R_2-\varepsilon)^q}, \tag{12}$$

其中 M 是個正常數，其值顯然和 ε 的選取有關。

用(12)式右邊的數替代級數(4)的係數 a_{pq}，則得冪級數

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{M}{R_1'^p R_2'^q}(z_1-b_1)^p(z_2-b_2)^q, \quad (R_1'=R_1-\varepsilon;\ R_2'=R_2-\varepsilon) \tag{13}$$

通常稱爲級數(4)的優級數或強級數。易見級數(13)的和等於

$$(14)\qquad \frac{M}{\left(1-\frac{z_1-b_1}{R_1'}\right)\left(1-\frac{z_2-b_2}{R_2'}\right)},$$

這函數稱爲級數(4)的優函數或強函數。當他依(z_1-b_1)和(z_2-b_2)的冪展開爲冪級數時,係數常爲正,且大於$|a_{pq}|$。

[14]的結果也不難拓展到兩個自變數的情形來。設有兩個以b_1和b_2爲中心的圓 $|z_1-b_1|\leqslant R_1$ 和 $|z_2-b_2|\leqslant R_2$,其圓周爲 l_1 和 l_2。函數$f(z_1, z_2)$在這兩閉圓中爲正則。又設 z_1 和 z_2 依次爲兩圓內部的任意兩固定點,則由句犀公式有

$$(15)\qquad f(z_1,z_2)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{l_1}dz_1'\int_{l_2}\frac{f(z_1',z_2')}{(z_1'-z_1)(z_2'-z_2)}dz_2'.$$

和[14]中一樣,我們可以將有理分式

$$\frac{1}{(z_1'-z_1)(z_2'-z_2)}$$

依(z_1-b_1)和(z_2-b_2)的冪展開爲級數

$$\frac{1}{(z_1'-z_1)(z_2'-z_2)}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(z_1-b_1)^p(z_2-b_2)^q}{(z_1'-b_1)^{p+1}(z_2'-b_2)^{q+1}},$$

這級數關於圓周 l_1 和 l_2 上的點 z_1' 和 z_2' 爲一致收斂。將上式代入(15)式右邊,然後逐項積分,即得函數$f(z_1,z_2)$在兩圓內部的冪級數展開式:

$$(16)\qquad f(z_1,z_2)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}a_{pq}(z_1-b_1)^p(z_2-b_2)^q.$$

這級數的係數由下面的公式決定:

$$(17)\qquad a_{pq}=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{l_1}dz_1'\int_{l_2}\frac{f(z_1',z_2')}{(z_1'-b_1)^{p+1}(z_2'-b_2)^{q+1}}dz_2'=$$

$$=\frac{1}{p!\,q!}\left.\frac{\partial^{p+q}f(z_1,z_2)}{\partial z_1^p\,\partial z_2^q}\right|_{z_1=b_1;\,z_2=b_2}.$$

因此得證任何在兩圓內部爲正則的函數可以在這兩圓內部展開爲

冪級數❶。

和[14]中一樣，易見這展開式是唯一的，因爲他的係數必定由(11)式所決定之故。

我們可以把級數(4)中的項按照(z_1-b_1)和(z_2-b_2)的齊次式歸併起來，即將他寫成下面的形式

$$\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{p+q=s}a_{pq}(z_1-b_1)^p(z_2-b_2)^q, \tag{18}$$

其中內部的有限和展佈於所有那些滿足$p+q=s$的項之上。公式(18)將函數$f(z_1,z_2)$在收斂圓內部表示爲(z_1-b_1)和(z_2-b_2)的齊次多項式的級數。現在反過來，假設(z_1-b_1)和(z_2-b_2)的齊次多項式所成的級數(18)在兩圓$|z_1-b_1|\leqslant R_1$和$|z_2-b_2|\leqslant R_2$中爲一致收斂。則由維爾史特拉斯定理這級數的和$f(z_1,z_2)$是這兩圓中的正則函數。

並且我們還可以將級數(18)關於任一變數逐項微分任何次之多。微分以後再置$z_1=b_1$和$z_2=b_2$，卽得係數a_{pq}所滿足的(11)式。這表明諸係數a_{pq}就是函數$f(z_1,z_2)$的泰勒係數，於是我們可以把級數(18)改寫成二重級數(4)的形式，這級數在兩圓內部絕對且一致收斂。因此得證：若齊次多項式所成的級數在某兩圓內部爲一致收斂，則此級數必可改寫爲具普通形式的二重冪級數，在兩圓內部爲絕對收斂。

若將z_1和z_2分開爲實數和虛數部分：

$$z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2,$$

則在以(x_1,y_1,x_2,y_2)爲坐標的四維空間中級數(18)的一致收斂區域有時可以比級數(4)的一致收斂區域更大一些。

設以級數(9)爲例。這時(18)取下面的形式：

$$\sum_{s=0}^{\infty}(z_1+z_2)^s,$$

他的一致收斂區域由下面的不等式決定：

---

❶ 前面假設$f(z_1,z_2)$在兩閉圓中爲正則祇是爲敍述證明時便當一些，讀者易見當$f(z_1,z_2)$祇在兩圓內部爲正則時結果依然成立(譯者)。

$$|z_1+z_2|<1,$$

亦卽

(19) $$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2<1。$$

對於級數(9)前面已證應有 $R_1+R_2=1$，故其收斂區域由不等式

$$|z_1|+|z_2|<1$$

決定，此卽

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}<1,$$

或

(20) $$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}<1。$$

不等式(19)所定義的區域比不等式(20)所定義的更大，卽若 x_k 與 y_k 滿足(20)時必定也滿足(19)，其逆不眞。實際上，由不等式

$$(x_1x_2+y_1y_2)^2\leqslant(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$$

立刻可知(19)的左邊小於或等於(20)的左邊。

所有以上的論斷和結果都可拓廣到 n 個變數的冪級數去，那時我們所得到的冪級數的絕對且均勻收斂區域將是 n 個圓的聯合體。

84. 解析延拓 由形式如(4)的冪級數在其收斂圓內部所定義的兩個變數的函數 $f(z_1,z_2)$ 有時可在更大的區域中為正則，於是和單變數函數的情形一樣又發生了函數的解析延拓的問題。和單變數函數的情形一樣[18]，有基本定理成立，依據這個定理若在同一對區域中為正則的兩函數在每一區域中的一點 $z_1=b_1$ 和 $z_2=b_2$ 有相同的函數值，並且他們任何階的導數在這兩點的數值也都相同，則這兩函數在這一對區域中全同。

現在來研究由冪級數所定義的函數 $f(z_1,z_2)$，假設 $z_1=c_1$ 和 $z_2=c_2$ 是收斂圓中的兩點。應用級數(4)我們可以決定導數

$$\left.\frac{\partial^{p+q}f(z_1,z_2)}{\partial z_1^p\partial z_2^q}\right|_{z_1=c_1;\,z_2=c_2}$$

的值，然後再做函數 $f(z_1,z_2)$ 依 (z_1-c_1) 和 (z_2-c_2) 的冪展開時的泰勒

級數：

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a'_{pq}(z_1-c_1)^p(z_2-c_2)^q。 \tag{21}$$

易見這種冪級數的改造就相當於以

$$(z_1-b_1)^p=[(z_1-c_1)+(c_1-b_1)]^p$$
$$(z_2-b_2)^q=[(z_2-c_2)+(c_2-b_2)]^q$$

代入級數(4)，用二項式公式展開方括弧，然後再把所有含(z_1-c_1)和(z_2-c_2)的冪次相同的項歸併在一起。級數(21)在任何以c_1和c_2爲中心而分別含於級數(4)的兩收斂圓內部的兩圓之中顯然爲收斂，並且他的和等於$f(z_1,z_2)$。但有時級數(21)的收斂圓也可以越出級數(4)的收斂圓之外。這時我們就得到函數$f(z_1,z_2)$在更大的區域中的值，即擴大了正則函數$f(z_1,z_2)$的定義域。在有些場合之下，我們可以一次次地應用上述這種藉助於收斂圓的解析延拓來擴大正則函數的存在域以及他的全部可能值，於是也就定義了一個解析函數，這解析函數是由級數(4)所決定的元素經解析延拓而得到的。至於解析延拓和奇異點之間的關係我們不準備在此詳細去研究了。以上所說的一切也適用於自變數多於兩個的情形。祇是有一點要注意的，就是當$f(z_1,z_2)$做解析延拓時，如果祇知道z_1和z_2所經過的路線L_1和L_2的話，我們並不能決定這解析延拓的結果。更要緊的是要知道z_1和z_2沿着L_1和L_2變動時彼此間的關係如何。關於多變數函數論的一般理論我們就講到這裏爲止。目前函數論在這方面進展甚速。關於多變數函數論的基本事實在古剎的"數學分析"一書中可以找到更詳細的敍述。至於專門的書籍則有富克斯的"解析多變數函數論"(1948)，其中附載有豐富的文獻。

85. 方陣函數、預備知識　現在讓我們來研究以一個或幾個方陣爲變數的函數。先看一個方陣的函數。在$[\mathrm{III}_1, 44]$中我們已經研究過最簡單的情形，即一個方陣的多項式和有理函數。在深入研究更複雜的方陣函數之先，要說幾個基本概念。以後用n來記方陣的階數。

設有方陣的無限敍列

$$X_1, \ X_2, \cdots$$

我們稱這敍列以方陣 X 爲極限，若對任意足號 i 和 k 常有

(22) $$\lim_{m\to\infty}\{X_m\}_{ik}=\{X\}_{ik},$$

卽方陣 X_m 的元素常以 X 中對應的元素爲其極限。這時我們假設無限敍列中的方陣都是同階的。

再引進幾個以後要用的新的記號。$\|a\|$ 表示一個方陣，他的每一元素都等於 a。$|X|$ 表示一個方陣，其元素爲方陣 X 的元素的模，卽

(23) $$\{|X|\}_{ik}=|\{X\}_{ik}|。$$

若一方陣 Y 的元素常爲正，且皆大於 $|X|$ 的元素，則以不等式

$$|X|<Y$$

記之。換言之，這不等式和下面 n^2 個不等式相抵：

$$|\{X\}_{ik}|<\{Y\}_{ik}。\qquad (i, k=1, 2, \cdots, n)$$

再看以方陣爲項的無窮級數

$$Z_1+Z_2+\cdots$$

若這級數前面 n 項之和當 n 無限增加時有一定的極限方陣 Z，則稱他爲收斂。Z 稱爲這級數的和

(24) $$Z=Z_1+Z_2+\cdots$$

(24)式顯然相當於下面 n^2 個等式：

(25) $$\{Z\}_{ik}=\{Z_1\}_{ik}+\{Z_2\}_{ik}+\cdots \qquad (i,k=1,2,\cdots,n)$$

所有的滿足條件

(26) $$|X-A|<\|\rho\|$$

的方陣 X 稱爲方陣 A 的一個鄰域，這裏 ρ 是個已給正數。不等式(26)和下面 n^2 個不等式相抵：

$$|\{X-A\}_{ik}|<\rho。$$

方陣的冪級數是定義方陣函數的一種基本工具，所以先來研究一下這樣的級數。

86. 一個方陣的冪級數　一個方陣的冪級數其形式如下：

$$a_0+a_1(X-\alpha)+a_2(X-\alpha)^2+\cdots, \tag{27}$$

其中 a_k 和 α 是已知數。爲簡單起見以後常設 $\alpha=0$。於是級數(27)就有下面的形式：

$$a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots \tag{28}$$

由方陣的乘法規則有：

$$\{X^2\}_{ik}=\sum_{s=1}^{n}\{X\}_{is}\{X\}_{sk},$$

一般

$$\{X^m\}_{ik}=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_{m-1}}\{X\}_{ij_1}\{X\}_{j_1j_2}\cdots\{X\}_{j_{m-2}j_{m-1}}\{X\}_{j_{m-1}k},$$

上式右邊表示關於 $j_1, j_2, \cdots, j_{m-1}$ 相加，各自獨立地從 1 到 n。因此表示級數(28)的和的方陣的元素可以表示成級數的形式：

$$a_0\delta_{ik}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\sum_{j_1,\cdots,j_{m-1}}\{X\}_{ij_1}\{X\}_{j_1j_2}\cdots\{X\}_{j_{m-1}k}, \tag{29}$$

其中 δ_{ik} 的意義如下：

$$\delta_{ik}=\begin{cases}0 \text{ 當 } i\neq k\\ 1 \text{ 當 } i=k。\end{cases} \tag{30}$$

最後一事實乃是因爲級數(28)的常數項是 a_0 的緣故，這裏的 a_0 表示一個對角方陣，其對角線上的元素都等於 a_0。(29)式表明級數(28)和 n^2 個普通的冪級數相抵，每一冪級數中都含有 n^2 個變數 $\{X\}_{ik}$。注意：(29)式中對應於 $m=1$ 的項是 $a_1\{X\}_{ik}$，而內部求和符號不存在。

現在再談級數(28)的收斂問題。先看絕對收斂。爲此，除級數(28)外還要看下面的級數：

$$|a_0|+|a_1||X|+|a_2||X|^2+\cdots, \tag{31}$$

或是和這對應的 n^2 個級數：

$$|a_0|\delta_{ik}+\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_{m-1}}\{|X|\}_{ij_1}\{|X|\}_{j_1j_2}\cdots\{|X|\}_{j_{m-1}k}。 \tag{32}$$

如果這些級數收斂，那末級數(29)當然收斂，就是說，級數(31)的

收斂性保證級數(28)的收斂性，這時級數(28)稱爲絕對收斂。由 $|X|$ 的定義知

$$\{|X|\}_{ik}=|\{X\}_{ik}|,$$

故(32)式可由(29)式中每一數以其模替代而得。

其次，研究級數(28)爲絕對收斂的充分條件。先看一個普通的複變數 z 的冪級數

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots, \tag{33}$$

假設他的收斂半徑爲 $n\rho$，其中 n 是方陣的階數，ρ 是個正數。如[14]中所已知，對於級數(33)的係數有如下的估值：

$$|a_m|\leqslant\frac{M}{(n\rho-\varepsilon)^m}, \tag{34}$$

其中 ε 是任何一個小的固定正數，M 是個正數，和 ε 的選取有關。設 b 是某一數，試看方陣 $\|b\|$ 的正整數冪：

$$\{\|b\|^2\}_{ik}=bb+bb+\cdots+bb=nb^2,\quad 即\ \|b\|^2=\|nb^2\|,$$

一般有

$$\|b\|^m=\|n^{m-1}b^m\|。 \tag{35}$$

現在假設 $b=\rho_1>0$，再取一方陣 X，滿足條件

$$|X|<\|\rho_1\|。$$

那末顯見有

$$|X|^m<\|\rho_1\|^m,\quad 即\ |X|^m<\|n^{m-1}\rho_1^m\|。$$

由(34)有

$$|a_m||X|^m<\frac{M}{n}\left\|\left(\frac{n\rho_1}{n\rho-\varepsilon}\right)^m\right\|。$$

若 $\rho_1<\rho$，則取 ε 甚小時可使

$$0<\frac{n\rho_1}{n\rho-\varepsilon}<1,$$

這時級數(31)顯然收斂，從而級數(28)絕對收斂。若級數(33)的收斂半徑等於 ∞，則稱這級數的和爲 z 的整函數。由以上的證明可知這時

級數(28)對任何方陣 X 皆爲絕對收斂。因此得到下面的定理：

定理 若級數(33)的收斂半徑等於 $n\rho$，則對所有在原點的鄰域

$$|X| < \| \rho \| \tag{36}$$

中的方陣 X，級數(28)爲絕對收斂。若級數(33)定義一整函數，則級數(28)對任何方陣皆爲絕對收斂。

當級數(28)在區域(36)中絕對收斂時，我們稱這級數的和 $f(X)$ 爲該區域中的正則函數。

試以方陣的指數函數爲例：

$$e^X = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots \tag{37$_1$}$$

這時，和他對應的冪級數(33)的收斂半徑等於 ∞，故知(37_1)對任何方陣 X 常爲絕對收斂，或者說，(37_1)是方陣 X 的整函數。

再看以任一複數 a 爲底的指數函數

$$a^X = e^{X\lg a} = 1 + \frac{X\lg a}{1!} + \frac{X^2\lg^2 a}{2!} + \cdots, \tag{37$_2$}$$

其中 $\lg a$ 取複數 a 的某一固定對數値。函數(37_2)也是方陣 X 的整函數。現在證明冪級數展開的唯一性。設有兩個冪級數

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m X^m \text{ 和 } \sum_{m=0}^{\infty} a'_m X^m,$$

皆在鄰域(36)中絕對收斂，且在這鄰域中兩級數有相同的和，即

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m X^m = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m X^m。$$

現在要證明對於所有的 m，$a'_m = a_m$。爲此，注意對角方陣

$$X = z = [z, z, \cdots, z], \qquad |z| < \rho$$

滿足條件(36)。代入前式得：

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m z^m。 \qquad (|z| < \rho)$$

但是我們早知道複變數函數在任一圓中的冪級數展開式是唯一的[14]，故有 $a'_m = a_m$ 對於所有的 m。由是得下面的定理：

唯一性定理　若兩冪級數在鄰域(36)中絕對收斂，且在這鄰域中兩級數有相同的和，則這兩個級數的全部係數相同。

若再應用公式

$$(SXS^{-1})^k = SX^kS^{-1},$$

則仿[III_1,44]對於由冪級數(28)或(27)所定義的函數$f(X)$可證下面的等式：

$$f(SXS^{-1}) = Sf(X)S^{-1}。$$

57. 冪級數的乘法、冪級數的反演　設有二冪級數

$$f_1(X) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m X^m \text{ 和 } f_2(X) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m X^m,$$

在區域(36)中絕對收斂。將這兩級數的和相乘，得到另一方陣

$$Y = f_2(X) \cdot f_1(X)。$$

這方陣的元素由下面的式子決定：

$$\{Y\}_{ik} = \sum_{s=1}^{n} \{f_2(X)\}_{is} \{f_1(X)\}_{sk}, \tag{38}$$

其中

$$\{f_1(X)\}_{sk} = a_0 \delta_{sk} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sum_{j_1, \cdots, j_{m-1}} \{X\}_{sj_1} \{X\}_{j_1 j_2} \cdots \{X\}_{j_{m-1}k},$$

$$\{f_2(X)\}_{is} = b_0 \delta_{is} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sum_{j_1, \cdots, j_{m-1}} \{X\}_{ij_1} \{X\}_{j_1 j_2} \cdots \{X\}_{j_{m-1}s}。$$

這些級數都是絕對收斂的，故可逐項相乘，從而方陣Y的元素可寫為：

$$\{Y\}_{ik} = a_0 b_0 \delta_{ik} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \cdots$$

$$\cdots + a_m b_0) \sum_{j_1, \cdots, j_{m-1}} \{X\}_{ij_1} \{X\}_{j_1 j_2} \cdots \{X\}_{j_{m-1}k},$$

而Y自己就可寫成：

$$Y = a_0 b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \cdots + a_m b_0) X^m。$$

由此得證：絕對收斂的方陣冪級數可以像通常複數的冪級數一般地相乘，並且乘積和因子的次序無關。

已給一個由冪級數所定義的方陣函數

$$Y=f(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots, \tag{39}$$

其中 $a_1\neq 0$，現在要討論 $f(X)$ 的反函數的存在問題。

考察通常的複變數 z 的冪級數

$$w=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots \tag{40}$$

如我們所知，當 $a_1\neq 0$ 時存在唯一的由冪級數

$$z=c_1(w-a_0)+c_2(w-a_0)^2+\cdots \tag{41}$$

所定義的函數，在某一鄰域 $|w-a_0|<n\rho$ 中他是(40)的反函數。若將級數(41)代入(40)式的右邊

$$w=a_0+a_1\sum_{k=1}^{\infty}c_k(w-a_0)^k+a_2\left[\sum_{k=1}^{\infty}c_k(w-a_0)^k\right]^2+\cdots,$$

依級數相乘的規則求出各級數的自乘，然後將 $(w-a_0)$ 的冪次相同的各項歸併在一起，應該得到恆等式 $w=w$。如果在以上的計算中以方陣 X 代替 z，方陣 Y 代替 w，則關於依 $(Y-a_0)$ 之冪的方陣冪級數的全部計算與關於變數 $(w-a_0)$ 的冪級數的運算是同樣的，故結果亦同，就是說，當 $a_1\neq 0$ 時，在 $X=0$ 的鄰域中所定義的冪級數(39)有唯一的反函數

$$X=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(Y-a_0)^k, \tag{42}$$

這級數在鄰域

$$|Y-a_0|<\|\rho\| \tag{43}$$

中絕對收斂。

鄰域(43)顯見可由級數(41)的收斂半徑決定。

以上所說含 $(Y-a_0)^k$ 的方陣級數的形式運算和含 $(w-a_0)^k$ 的普通級數的運算一致的事，乃是因為該方陣級數祇含常數和唯一的方陣 $Y-a_0$ 及其乘冪之故，實際上，常數和任何方陣可交換，同一方陣的兩

個乘冪也可交換（卽二者相乘時與次序無關）所以兩種運算完全一致。例如，對正整數 h 我們可以應用牛頓二項式公式將

$$(Y-a_0)^h$$

展開爲 Y 的多項式。但是如果 U_1 和 U_2 是兩個不同的方陣，一般而論，我們就不能藉二項式公式來展開

$$(U_1+U_2)^h。$$

現在應用前面的論斷於指數函數

$$w=e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots$$

的特別情形。這函數的反函數是 $\lg w$，他可以展開爲

$$\lg w=\lg[1+(w-1)]=\frac{w-1}{1}-\frac{(w-1)^2}{2}+\cdots,$$

右邊的級數在圓 $|w-1|<1$ 中爲收斂。

這樣，將方陣指數函數

$$Y=e^X=1+\frac{X}{1!}+\frac{X^2}{2!}+\cdots$$

反演卽得方陣對數的冪級數形式：

(44) $$\lg Y=\frac{Y-1}{1}-\frac{(Y-1)^2}{2}+\cdots,$$

他在區域

(45) $$|Y-1|<\left\|\frac{1}{n}\right\|$$

中爲絕對收斂。

當方陣 Y 已給時，方陣方程

(46) $$e^X=Y,$$

關於 X 有無數多個解。(44)表示這方程的一個解，他在單位方陣的鄰域中是 Y 的正則函數，且當 $Y=1$ 時成爲零方陣。至於方程(46)的其他的解，在單位方陣的鄰域中，或在這鄰域之外的，應該如何求得的問

題，實際上繫於級數(44)的解析延拓的問題，亦卽繫於和級數(44)相抵的 n^2 個普通冪級數的解析延拓。這問題我們以後還要談到。

藉助於方陣對數我們可以定義方陣冪函數如下：

$$X^a = e^{a \lg X}。 \tag{47}$$

若 z 爲複變數，則

$$z^a = e^{a \lg z},$$

代入 $a \lg z$ 到指數函數的展開式中

$$e^{a \lg z} = 1 + \frac{a \lg z}{1} + \frac{a^2 \lg^2 z}{2!} + \cdots$$

再以

$$\lg z = \lg[1 + (z-1)] = \frac{z-1}{1} - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \cdots$$

代入，整理以後可得：

$$z^a = [1 + (z-1)]^a = 1 + \frac{a}{1!}(z-1) + \frac{a(a-1)}{2!}(z-1)^2 + \cdots,$$

這級數當 $|z-1| < 1$ 時收斂。回憶前面說過兩種運算一致的事實，可知：

$$X^a = e^{a \lg X} = 1 + \frac{a}{1!}(X-1) + \frac{a(a-1)}{2!}(X-1)^2 + \cdots, \tag{48}$$

這展開式在區域

$$|X-1| < \left\| \frac{1}{n} \right\| \tag{49}$$

中爲絕對收斂。

88. 收斂性的深入硏究　前面說過冪級數(28)和 n^2 個變數 $\{X\}_{ik}$ 的 n^2 個級數(29)相抵。現在來看級數(29)中的內部和

$$\sum_{j_1, \cdots, j_{m-1}} \{X\}_{ij_1}\{X\}_{j_1 j_2} \cdots \{X\}_{j_{m-1}k}。 \tag{50}$$

將這和中所有相同的項歸併在一起，我們就可以把級數(29)看做 n^2 個變數 $\{X\}_{ik}$ 的 n^2 個普通冪級數。將(50)式中的各數值以其模替

代，又以 $|a_m|$ 替代 a_m，其結果就等於把剛才所得 n^2 個普通冪級數的每一項以其模替代。因此得證：若將級數(29)改寫成變數 $\{X\}_{ik}$ 的普通冪級數形式，則其絕對收斂性相當於級數(32)的收斂性，即相當於級數(28)的絕對收斂性。

一般，級數(28)爲收斂的意義就是當正整數 $l\to\infty$ 時方陣叙列

$$a_0+\sum_{m=1}^{l}a_mX^m \tag{51}$$

的極限存在。在(51)上再加一個對應於 $m=l+1$ 的項，其意義就是在

$$a_0\delta_{ik}+\sum_{m=1}^{l}a_m\sum_{j_1,\cdots,j_{m-1}}\{X\}_{ij_1}\{X\}_{j_1j_2}\cdots\{X\}_{j_{m-1}k} \tag{52}$$

上再加一個 $(l+1)$ 次的 $\{X\}_{ik}$ 的齊次多項式

$$a_{l+1}\sum_{j_1,\cdots,j_l}\{X\}_{ij_1}\{X\}_{j_1j_2}\cdots\{X\}_{j_lk}\text{。} \tag{53}$$

因此，在剛才所說的一般意義之下，級數(28)的收斂性就和 n^2 個級數(29)的收斂性相抵，而在這些級數中每一項是一個形式如(53)的齊次多項式。我們先研究級數(28)在一種特殊區域中的收斂性，即在由不等式

$$|X|<A \tag{54}$$

所定義的區域中，這裏 A 是個已給具正元素的方陣。不等式(54)和下面 n^2 個不等式

$$|\{X\}_{ik}|<\{A\}_{ik} \tag{55}$$

相抵，後者定義關於複變數 $\{X\}_{ik}$ 的以原點爲中心的 n^2 個聯合圓。現在假設級數(28)在區域(54)中收斂。又設 θ 爲任一小於1的正數。則級數(28)當 $X=\theta A$ 時應收斂，即 n^2 個級數

$$a_0\delta_{ik}+\sum_{m=1}^{\infty}\theta^m a_m\sum_{j_1,\cdots,j_{m-1}}\{A\}_{ij_1}\{A\}_{j_1j_2}\cdots\{A\}_{j_{m-1}k}$$

都應收斂。這些級數可以看成 θ 的冪級數，因此他們必定是絕對收斂，即 n^2 個正項級數

$$|a_0\delta_{ik}|+\sum_{m=1}^{\infty}\theta^m|a_m|\sum_{j_1,\cdots,j_{m-1}}\{A\}_{ij_1}\{A\}_{j_1j_2}\cdots\{A\}_{j_{m-1}k}$$

皆為收斂。因此知道級數(29)對於方陣θA為絕對收斂。對於所有的滿足條件$|X|<\theta A$的方陣X,級數(29)當然也是絕對收斂。因θ可以任意接近於1,故對於屬於區域(54)中所有的方陣,級數(29)絕對收斂。從而級數(28)亦在區域(54)中絕對收斂。故得下面這定理。

定理　若級數(28)在區域(54)中為收斂,則必為絕對收斂,換言之,n^2個冪級數(29)在聯合圓(55)中為絕對收斂。

直到現在我們祇研究了在不等式(54)或不等式(36)所定義的區域中冪級數的收斂問題,而不等式(36)是不等式(54)的特殊情形。以下將要轉到冪級數收斂性的一般研究,但設方陣X可以化成純對角線方陣的形式。如我們所知,所有的U方陣,H方陣以及特徵數都互不相同的方陣常可化成對角線方陣。上述條件也可以如此說:我們祇研究具有單重初等因子的方陣。這種方陣可以表示成[III$_1$, 27]:

(56) $$X=S[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]S^{-1},$$

其中S為一行列式不等於零的方陣,λ_i是X的特徵數。為簡潔計把級數的部分和記成:

$$f_l(X)=a_0+\sum_{m=1}^{l}a_m X^m;\ f_l(z)=a_0+\sum_{m=1}^{l}a_m z^m,$$

又記級數的和為

$$f(X)\ 和\ f(z)。$$

將(56)式代入$f_l(X)$可得[III$_1$, 44]:

$$f_l(X)=a_0+S\left(\sum_{m=1}^{l}a_m[\lambda_1^m, \lambda_2^m, \cdots, \lambda_n^m]\right)S^{-1}$$

或

(57) $$f_l(X)=S[f_l(\lambda_1), f_l(\lambda_2), \cdots, f_l(\lambda_n)]S^{-1}。$$

如果所有的特徵數λ_i都在級數(33)的收斂圓內部,則(57)式當$l\to\infty$時有一定的極限值,即

(58) $$f(X)=S[f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)]S^{-1},$$

因此這時級數(28)收斂。再設有一個特徵數,如λ_1,位於級數(33)的

收斂圓外部，則可證(57)不趨於一定的極限值。實際上，我們可將等式(57)改寫成下面的形式：

$$[f_l(\lambda_1), f_l(\lambda_2), \cdots, f_l(\lambda_n)] = S^{-1} f_l(X) S。$$

若 $f_l(X)$ 有極限值，則等式左邊也應該有極限，即對角線方陣的每一元素都有極限。但已假設 λ_1 位於級數(33)的收斂圓外部，元素 $f_l(\lambda_1)$ 當然沒有極限。因此得證：

定理　若方陣 X 所有的特徵數皆在級數(33)的收斂圓內部，則羃級數(28)收斂，但祇要有一個特徵數在這圓外部時，級數(28)就發散。

上述定理是對於有單重初等因子的，即具形式(56)的方陣 X 證明的。這個證明可以推廣到一般的情形，但我們不想在此多講了。

現在再轉到絕對收斂性，即關於級數(31)的收斂性的研究。

回憶通常複變數的羃級數在其收斂圓內部為絕對收斂的事實，可知級數

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_m| z^m$$

有和級數(33)相同的收斂半徑。應用剛才證明的定理於級數(31)，我們得到下面的關於絕對收斂性的定理：

定理　若方陣 $|X|$ 所有的特徵數都在級數(33)的收斂圓內部，則級數(28)絕對收斂，但祇要有一個特徵數在這圓外部時，級數(28)即不絕對收斂。

由本節開始時所述知道級數(28)的絕對收斂性包含其在一般意義下的收斂性。應用這事實不難證明方陣 $|X|$ 的特徵數的模的最大值不小於方陣 X 的特徵數的模的最大值。實際上，設這兩最大值依次為 ρ_1 和 ρ_2。若 $\rho_2 > \rho_1$，則可引出矛盾來。適當選取級數(33)的係數 a_m 使其收斂半徑為 ρ，且 ρ 滿足條件 $\rho_2 > \rho > \rho_1$。例如由分式

$$\frac{1}{1-\frac{z}{a}}$$

展開所得的冪級數就是以 ρ 爲收斂半徑的。

由剛才所證的定理知道這時級數(31)爲收斂，而級數(28)爲發散，這和絕對收斂性包含普通的收斂性一事相矛盾。

(58)式表明若方陣 X 的特徵數爲 λ_i，並且所有的初等因子都是單重的，則由收斂冪級數所定義的方陣 $f(X)$ 以 $f(\lambda_i)$ 爲特徵數，並且所有的初等因子也都是單重的。這一性質在某種附加條件之下可以拓廣到非單重初等因子的情形去，即成立下面的定理：若方陣 X 的初等因子爲

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1},(\lambda-\lambda_2)^{p_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{p_s},$$

則由冪級數所定義的方陣 $f(X)$ 以

$$[\lambda-f(\lambda_1)]^{p_1},\ [\lambda-f(\lambda_2)]^{p_2},\cdots,\ [\lambda-f(\lambda_s)]^{p_s}$$

爲初等因子，祇要 $f'(\lambda_k)$ 都不等於零。

我們也可以藉助於(58)式來研究由冪級數所定義的函數 $f(X)$ 的解析延拓。假設級數在區域(54)中爲絕對收斂，X_0 是這區域中的一個方陣。將 X_0 的元素按照某種一定的規律連續地變動。這時 X_0 的特徵數 λ_i 也將連續地變動。又假設在(56)式中出現的方陣 S 的元素也連續地變動。則由(58)式，方陣 $f(X)$ 的解析延拓的問題就還原爲一個複變數函數 $f(\lambda)$ 的解析延拓的問題了。

上記的解析延拓有一種非常不便利之處，就是當 X 已給時(58)式中所含的方陣 S 沒有一定的值。實際上，例如對 H 方陣而言，我們已經看到方陣 S 有各種不同的選取方法了。在一些特別情形之下，上述的解析延拓可以不符合於 n^2 個級數(29)的解析延拓。以後我們要比較詳細地解釋關於解析延拓的問題。爲此，需要一個重要的公式。作爲這公式的預備，我們先講關於插值法的幾個簡單的公式。

89. 插值多項式　插值法的最簡單而基本的問題如下：找一個次數不高於 $(n-1)$ 的多項式，他在複平面上 n 個點取已給數值。假設這多項式在 n 個點 z_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 之值爲 w_k。首先注意，這種多項式

祇能有一個。事實上,我們知道[I, 185],兩個次數不高於$(n-1)$的多項式若在n個點有相同的數值則必爲恆等。這插值問題的解可以用下面的簡單式子表示:

$$(59)\quad P_{n-1}(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{k-1})(z-z_{k+1})\cdots(z-z_n)}{(z_k-z_1)(z_k-z_2)\cdots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\cdots(z_k-z_n)}w_k。$$

易見上式右邊確爲次數不高於$(n-1)$的z的多項式。若置$z=z_1$,則右邊除第一項外都等於零,而第一項中的分數等於1,即$P_{n-1}(z_1)=$ $=w_1$。同樣可證$P_{n-1}(z_k)=w_k$。

若$f(z)$爲某區域中的正則函數,又z_k是這區域中的點,則公式

$$(60)\quad P_{n-1}(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(z-z_1)\cdots(z-z_{k-1})(z-z_{k+1})\cdots(z-z_n)}{(z_k-z_1)\cdots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\cdots(z_k-z_n)}f(z_k)$$

決定唯一的次數不高於$(n-1)$的多項式,他在各點z_k的數值等於$f(z_k)$。這多項式通常稱爲諸點z_k的拉格朗日插值多項式。(60)式稱爲拉格朗日的插值公式。

一般的$(n-1)$次多項式

$$a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}$$

包含n個參數a_s。在拉格朗日公式中這些參數由n個條件所決定,即在各點z_k多項式的值應該等於$f(z_k)$。現在我們來討論一個更一般的問題。假設$f(z)$在某一區域中爲正則,$z_1, z_2, \cdots z_j$爲這區域內部已給的j個點,問題是要造一個次數不高於$(n-1)$的多項式,使在各點z_k多項式的數值以及他的導數直到(p_k-1)階的數值都和函數$f(z)$及其導數在對應點的數值相等,即此時多項式$P(z)$應滿足條件

$$P(z_k)=f(z_k);\ \cdots;\ P^{(p_k-1)}(z_k)=f^{(p_k-1)}(z_k),\ (k=1, 2, \cdots, j)$$

這時我們假設$p_1+p_2+\cdots+p_j=n$,所以條件的個數還是n。如前易證這種多項式祇可能有一個。實際上,假如有兩個的話,則他們的差將是一個次數不高於$(n-1)$的多項式,而以z_k爲p_k重零點,即此多項式有n個零點,這是不可能的事。因此我們現在所討論的更一般的插值問

題仍舊祇可能有一個解。下面說明建造這種插值多項式的方法。先造 n 次多項式

$$p(z)=(z-z_1)^{p_1}(z-z_2)^{p_2}\cdots(z-z_j)^{p_j}$$

及函數

(61)
$$\varphi(z)=\frac{f(z)}{p(z)}.$$

函數 $\varphi(z)$ 可能以 z_k 爲極點，但其階數不高於 p_k。這函數關於這些極點的無限部分的和是一個分子次數低於分母次數的分式，其分母的形式爲

$$(z-z_1)^{q_1}(z-z_2)^{q_2}\cdots(z-z_j)^{q_j},$$

此中整數 q_k 不大於 p_k。用相同的因子乘分子和分母，我們可以把函數 $\varphi(z)$ 的無限部分改寫成

$$\frac{P_{n-1}(z)}{p(z)},$$

其中 $P_{n-1}(z)$ 爲次數不高於 $(n-1)$ 的多項式。由是(61)式可以改寫成下面的形式：

$$\frac{f(z)}{p(z)}=\frac{P_{n-1}(z)}{p(z)}+\omega(z),$$

其中 $\omega(z)$ 爲整個區域中的正則函數，連 z_k 也在內。上式又可改寫成：

(62)
$$f(z)=P_{n-1}(z)+p(z)\omega(z).$$

這式子右邊第二項在 z_k 的鄰域中可表示爲 $(z-z_k)^{p_k}$ 和一個在 z_k 爲正則的函數的乘積，就是說，右邊第二項和他的導數直到 (p_k-1) 階在 z_k 這點都等於零。因此在各點 z_k 多項式 $P_{n-1}(z)$ 及其導數直到 (p_k-1) 階的數值與函數 $f(z)$ 及其導數在對應點的數值全同，卽 $P_{n-1}(z)$ 爲所要求的插值多項式。我們以後常用 $h(z;\ z_1,\ \cdots,\ z_n)$ 來記他。當各 z_k 互不相同時，這就是拉格朗日多項式。如果諸數 z_k 中有相同的，例如設某一 z_k 出現 p_k 次，則在這點多項式及其導數直到 (p_k-1) 階的數值與函數 $f(z)$ 及其對應各導數的數值全同，當 $n=2$ 及 $z_1\neq z_2$ 時有

$$h(z;\ z_1, z_2)=\frac{z-z_2}{z_1-z_2}f(z_1)+\frac{z-z_1}{z_2-z_1}f(z_2),$$

當 $z_1=z_2$ 時有

$$h(z;\ z_1,\ z_2)=f(z_1)+\frac{z-z_1}{1}f'(z_1)。$$

90. 開雷恆等式和錫爾維斯脫公式 設 X 爲一方陣，

(63) $$D(X-\lambda I)=0$$

是他的特徵方程，其中 $D(Y)$ 表示方陣 Y 的行列式。以 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 記這方程的根。上式左邊可寫爲：

(64) $$(-1)^n(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n)=(-1)^n\psi(\lambda),$$

其中 a_k 可用方陣 X 的元素來表示，也可用方程(63)的根來表示。例如

$$a_1=-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n);\quad a_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\cdots+\lambda_{n-1}\lambda_n。$$

這些 a_k 都是方陣的數字函數，就是說，當方陣 X 已給時，他們就有一定的數值。我們以前在 [III_1, 27] 中早已看過這類函數了。注意：$(-1)^n a_n$ 是方陣的行列式，$-a_1$ 是方陣的跡，卽等於對角線上元素的和。

開雷恆等式告訴我們，如果以方陣 X 代入多項式 $\psi(\lambda)=\lambda^n+ +a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$，則所得爲零方陣，卽下式成立：

(65) $$\psi(X)=X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n=0。$$

爲此，假設特徵數 λ_k 互不相同，或更一般，假設方陣 X 可表示爲下之形式：

$$X=S[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n]S^{-1}。$$

這時，如 [III_1, 44] 中所已知，有：

$$\psi(X)=S[\psi(\lambda_1),\ \psi(\lambda_2),\ \cdots,\ \psi(\lambda_n)]S^{-1}。$$

但 λ_k 是多項式 $\psi(z)$ 的零點，故

$$\psi(X)=S[0,\ 0,\ \cdots,\ 0]S^{-1}。$$

上式右邊中間的對角線方陣的對角線元素都等於零，故必爲零方

陣，因此右邊三方陣之積也是零方陣，即(65)式成立。利用極限步驟，先考慮具有不同的特徵數的方陣，不難將這恆等式的證明推廣到一般的情形去。

現在假設函數$f(X)$係由絕對收斂冪級數

(66) $$f(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots$$

在區域

(67) $$|X|<A$$

中所定義的。任意取這區域中的一個方陣X，假設其特徵數λ_k互不相同。設在恆等式(62)中

$$p(z)=(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n)=\psi(z)。$$

則成立恆等式

(68) $$f(z)=P_{n-1}(z)+\psi(z)\omega(z),$$

其中$P_{n-1}(z)$是諸點λ_k的拉格朗日插值多項式。顯然，若以方陣X代替變數z，(68)式依然恆等，因爲這時右邊的乘積將祇含X和他的乘冪，所以用X代z不致改變其相乘規則。但現在由(65)式知道多項式$\psi(X)$恆等於零，故由開雷恆等式可以得到

$$f(X)=P_{n-1}(X)。$$

將上式展開，即知對於區域(67)中任一具有互不相同之特徵數的方陣X常成立

(69) $$f(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_{k-1})(X-\lambda_{k+1})\cdots(X-\lambda_n)}{(\lambda_k-\lambda_1)\cdots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\cdots(\lambda_k-\lambda_n)}f(\lambda_k)。$$

這式子通常稱爲錫爾維斯脫公式，他將無窮級數(66)表示爲方陣的多項式，在這多項式中祇有普通的複變數的冪級數$f(\lambda_k)$出現。

如果方陣X的特徵數中有相同的，則(69)式右邊將不是拉格朗日插值多項式，而是更一般的插值多項式，這個我們在上一小節中已經說過，並且我們同樣可以把(66)式所定義的函數$f(X)$寫成方陣的多項式

(70) $$f(X)=h(X;\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)。$$

對於二階方陣當 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 時，

$$f(X)=\frac{X-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}f(\lambda_1)+\frac{X-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}f(\lambda_2), \tag{71}$$

當 $\lambda_1=\lambda_2$ 時，

$$f(X)=f(\lambda_1)+(X-\lambda_1)f'(\lambda_1)。 \tag{72}$$

例如對二階方陣的指數函數當 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 時有

$$e^X=\frac{X-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1}+\frac{X-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2}。 \tag{73}$$

注意：適用於特徵數 λ_k 非互不相同時的一般公式(70)也可以由(69)式藉極限法將其中某些 λ_k 趨於同一數值而得。

91. 解析延拓 在區域(67)中定義正則函數 $f(X)$ 的公式(66)實際上和在聯合圓

$$|\{X\}_{ik}|<\{A\}_{ik}$$

中絕對收斂的 n^2 個冪級數(29)相抵。

做這 n^2 個冪級數的解析延拓，我們就可以在一個更大的區域中來定義方陣 $f(X)$，而由這種解析延拓所得到的方陣全體就定義了解析函數 $f(X)$，他的始元素是區域(67)中的級數(66)。

回到錫爾維斯脫公式。當方陣 X 的元素按照一定的規則連續變動時，他的特徵數 λ_k 也在一定的方式之下連續變動，由(69)式知道 $f(X)$ 的解析延拓的問題歸結到複變數函數 $f(z)$ 的解析延拓問題去了。若在解析延拓過程中某幾個 λ_k 變爲相等，則應以(70)式代替(69)式。如果經過解析延拓後複變數函數 $f(z)$ 爲單值，那末依照錫爾維斯脫公式做 $f(X)$ 的解析延拓時所能遇到的唯一困難將是那一些方陣 X，他們的特徵數中有些是函數 $f(z)$ 的奇異點的。例如，對於原點的鄰域中由級數

$$f(X)=1+X+X^2+\cdots,$$

所定義的函數 $f(X)$，我們要做他的解析延拓時，祇要特徵數有一個等

於 1 的都是奇異方陣。可以證明在上述情形下藉助於錫爾維斯脫公式的解析延拓完全和藉助於 n^2 個冪級數的解析延拓相抵，所以用前一種方法亦可求得解析函數的所有數值。

現在再看經過解析延拓以後 $f(z)$ 是多值解析函數的情形。這時，如我們所已知，函數 $f(z)$ 不在普通的複變數平面上為單值，而是在某一象徵他的多值性的多葉黎曼曲面 R 上為單值。當方陣 X 的元素連續變動時，他的特徵數就在上述這黎曼曲面 R 上連續變動。如果我們要決定函數 $f(X)$ 對於某一特殊方陣 $X=X_0$ 的值，我們不僅要知道方陣 X_0，並且還需要指出從函數的最初定義域(67)中的一個方陣如何將 $f(X)$ 解析延拓到 X_0 的過程。簡單些說，我們不僅要知道方陣 X_0，並且還要知道到達 X_0 的解析延拓的道路。現在假設這道路是這樣：解析延拓常藉助於錫爾維斯脫公式而履行，但是當 X 趨向 X_0 時，有兩個特徵數 λ_1 和 λ_2 趨向重合，就是說，都趨向同一個複數 λ_0，不過這兩個相同的複數 λ_0 卻在黎曼曲面 R 的不同兩葉之上。這時取極限，對於方陣 X_0 而言，他的兩個特徵數 λ_1 和 λ_2 是重合了，但是在他們的共同值 λ_0 的鄰近函數 $f(z)$ 則由兩個不同的泰勒級數來決定，因為他們所對應的點位於黎曼曲面 R 的不同兩葉上的緣故。一般而論，取極限時常有 $f(\lambda_1)\neq\neq f(\lambda_2)$，雖然 $\lambda_1=\lambda_2$。在這種情形拉格朗日或錫爾維斯脫公式就失了他的意義，因此對道種解析延拓的道路我們視方陣 X_0 為函數 $f(X)$ 的奇異點。當然，有時也可以遇到 $f(\lambda_1)=f(\lambda_2)$，而他們的某一導數不同的情形，即對某一 s，有 $f^{(s)}(\lambda_1)\neq f^{(s)}(\lambda_2)$，雖然 $\lambda_1=\lambda_2$。這時我們可以把特徵數 λ_1 和 λ_2 的共同極限值 λ_0 經過任意小的變動而得到另一數值 λ_0'，使得對於不同兩葉上的 λ_0'，又有 $f(\lambda_1)\neq f(\lambda_2)$，當 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0'$。和前面一樣，這方陣 X_0 也視為解析函數 $f(X)$ 的奇異點。因此當 $f(z)$ 為多值函數時，如果由某一條解析延拓的道路到達了方陣 X，他的同一特徵數對應於函數 $f(z)$ 的不同解析元素時，則此 X 也視為解析函數 $f(X)$ 的奇異方陣。

我們不準備在這裏更詳細來解析以上所說的多值解析函數的特性了。下面祇看一個最簡單的特別情形。設

$$X=S[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]S^{-1},$$

其中 S 爲固定的方陣，其行列式不等於零，又諸 λ_k 互不相同。又設這 X 位於區域(67)之中，函數 $f(X)$ 在這區域中由級數(66)所定義。現在將方陣 X 依照下面的規則連續變動：即將 S 固定，讓各數 λ_k 如此變動，使得他們常爲互不相同，且不等於函數 $f(z)$ 的奇異點，但是最後大家都趨於同一極限值 λ_0，不過這些 λ_0 是在 $f(z)$ 的黎曼曲面 R 的不同各葉上的。爲簡單計，假設在任二葉上的同一點 λ_0 函數 $f(z)$ 的值常不相同，取極限時得一方陣

$$X_0=S[\lambda_0, \lambda_0, \cdots, \lambda_0]S^{-1}=\lambda_0$$

由[III_1, 44]知在區域(67)中定義的函數的值爲

$$S[f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)]S^{-1}, \tag{74}$$

所以問題就歸到當 S 固定時 $f(\lambda_k)$ 的解析延拓了。顯見在上面所說的情形，函數 $f(X)$ 有一定的極限值

$$S[\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n]S^{-1}, \tag{75}$$

其中 μ_k 表示在 λ_k 所趨的那一葉黎曼曲面上解析函數 $f(\lambda_0)$ 的值。注意：最後的結果(75)繫於方陣 S 的選取。因爲當 $i\neq k$ 時 $\mu_i\neq\mu_k$，所以方陣 S 的元素無論怎樣略略變動一下的時候，(75)的值也必定有變動。而定方陣 S 卽固定方陣 X 在解析延拓中變動時的規律。這時在奇異點 $X=X_0$ 函數 $f(X)$ 有一定的極限值。將 S 的元素稍稍變動時函數 $f(X)$ 的極限值也變過。由此可知級數(29)不能被解析延拓過 $X=X_0$ 這點。這種奇異點當然繫於引到這點來的解析延拓的道路。一般可證，當 $f(z)$ 爲多值時，如上所定義的 $f(X)$ 的奇異點同時也是藉助於 n^2 個冪級數(29)的解析延拓的奇異點，其逆亦然。換言之，藉助於錫爾維斯脫公式的解析延拓和藉助於 n^2 個級數(29)的解析延拓相抵。所以這時解析延拓的奇異方陣有兩種，一種是方陣的特徵數中含有 $f(z)$ 的奇

異點者，一種是方陣的相同特徵數位於函數$f(z)$的不同葉黎曼曲面上者。

92 多值函數的例子 按定義，方陣 X 的对數

$$Y=\operatorname{Lg} X \tag{76}$$

是方程

$$e^Y=X \tag{77}$$

的解。今設方陣 X 有單重初等因子

$$X=S[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]S^{-1}, \tag{78}$$

其中沒有一個 λ_k 等於零。易見若置

$$Y=S[\operatorname{Lg}\lambda_1,\operatorname{Lg}\lambda_2,\cdots,\operatorname{Lg}\lambda_n]S^{-1}, \tag{79}$$

則此 Y 是方程(77)的解。

實際上，如我們所已知：

$$e^Y=S[e^{\operatorname{Lg}\lambda_1},e^{\operatorname{Lg}\lambda_2},\cdots,e^{\operatorname{Lg}\lambda_n}]S^{-1}=S[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]S^{-1},$$

即方陣(79)滿足方程(77)。(79)式中 $\operatorname{Lg}\lambda_k$ 的值可以任意取，故知

$$Y=S[\lg\lambda_1+2\pi r_1 i,\cdots,\lg\lambda_n+2\pi r_n i]S^{-1}, \tag{80}$$

其中 $\lg\lambda_k$ 常表示對數的主值，即

$$-\pi<\arg\lambda_k\leqslant\pi,$$

又 r_k 是任意的整數。

(80)式中 Y 的多值性有兩種起因。第一是由於 r_k 可以任意選取，第二是當(78)式中的 X 固定時，方陣 S 仍有相當的任意性。若當 $\lambda_i=\lambda_k$ 時常有 $r_i=r_k$，則對應的 $\operatorname{Lg}X$ 的數值稱為正則的。現在證明對數的正則值可由整數 r_k 完全決定，而與方陣 S 的取法無關，設方陣 X 有互不相同的特徵數 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_j$，又 $r_1,r_2,\cdots,r_j$ 是(80)式中對應的整數。做一個次數不高於 $j-1$ 的勒格朗日插值多項式，使滿足條件：

$$P(\mu_k)=\lg\mu_k+2\pi r_k i\text{。}\qquad(k=1,2,\cdots j)$$

由(78)式有

$$P(X)=S[P(\lambda_1),\cdots,P(\lambda_n)]S^{-1}$$

或

$$P(X)=S[\lg\lambda_1+2\pi r_1 i,\cdots,\lg\lambda_n+2\pi r_n i]S^{-1}$$

即 $P(X)=Y$，由此立刻可知對數的值與方陣 S 的取法無關，因為在做多項式 $P(X)$ 時方陣 S 完全是任意的，祗要滿足(78)式就好了。

應用勒格朗日公式得：

$$\operatorname{Lg}X=\sum_{k=1}^{n}\frac{(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_{k-1})(X-\lambda_{k+1})\cdots(X-\lambda_n)}{(\lambda_k-\lambda_1)\cdots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\cdots(\lambda_k-\lambda_n)}\operatorname{Lg}\lambda_k, \tag{81}$$

但設所有的特徵數皆互不相同。利用這公式可以證明任一方陣，祗要他的特徵數中有一個等于零的，便是函數 $\operatorname{Lg}X$ 的奇異方陣。

今設方陣 X 不能表示爲(78)的形式，卽有重複的初等因子。利用[88]中的結果可以證明如果 X 的初等因子是

(82) $$(\lambda-\lambda_1)^{p_1},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_m)^{p_m},$$

則方程(77)的解 $\mathrm{Lg}\,X$ 的初等因子是

(83) $$(\lambda-\mathrm{Lg}\,\lambda_1)^{p_1},\ \cdots,\ (\lambda-\mathrm{Lg}\,\lambda_m)^{p_m}。$$

如果對相同的 λ_k 取相同的值 $\mathrm{Lg}\,\lambda_k$，則對應的 $\mathrm{Lg}\,X$ 的值稱爲正則。我們還可以證明(81)式經過解析延拓後可以而且祇能得到 $\lg X$ 的全部正則值。

現在看一個對數的非正則值的最簡單的例子。設取方陣 X 爲一數 λ，就是說，X 是個以 λ 爲元素的對角線方陣，X 可以寫成下面的形式：

$$X=S[\lambda,\lambda,\cdots,\lambda]S^{-1}=S\lambda S^{-1}=\lambda I,$$

其中 S 是任意的行列式不等於零的方陣。固定一組 r_k 我們得到

$$\mathrm{Lg}\,X=S[\lg\lambda+2\pi r_1 i,\ \lg\lambda+2\pi r_2 i,\ \cdots,\ \lg\lambda+2\pi r_n i]S^{-1}$$

或 $$\mathrm{Lg}\,X=S[\lg\lambda,\lg\lambda,\cdots,\lg\lambda]S^{-1}+S[2\pi r_1 i,\ 2\pi r_2 i,\ \cdots,\ 2\pi r_n i]S^{-1},$$

或卽 $$\mathrm{Lg}\,X=\lg\lambda\, I+2\pi i S[r_1,r_2,\cdots,r_n]S^{-1}。$$

如果諸數 r_k 不盡相同，則上式右邊第二項的值與 S 的選取有關，而 S 的選取則是完全任意的。

上面我們看到當 X 具(78)式的形式時，公式(79)表示方程(77)的解。可以證明這時方程(77)的所有的解都可由公式(79)得到(S 取所有可能的取法)。

再看一方陣的平方根

$$Y=X^{\frac{1}{2}}$$

他是方程

(84) $$Y^2=X$$

的解。當 X 在單位方陣的某一鄰域中時，這多值函數的一支可以用下面的冪級數來表示：

(85) $$Y=[I+(X-I)]^{\frac{1}{2}}=I+\frac{1}{2}(X-I)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(X-I)^2+\cdots,$$

如果方陣 X 的特徵數都不相同，則此級數可藉錫爾維斯脫公式改寫爲：

(86) $$Y=X^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_{k-1})(X-\lambda_{k+1})\cdots(X-\lambda_n)}{(\lambda_k-\lambda_1)\cdots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\cdots(\lambda_k-\lambda_n)}\sqrt{\lambda_k}。$$

爲簡單計假設方陣是二階的。設 X 具形式：

$$X=S[\lambda_1,\lambda_2]S^{-1}。\qquad (\lambda_1 \text{ 和 } \lambda_2\neq 0)$$

易證方程(84)的解爲

(87) $$S[\pm\sqrt{\lambda_1},\ \pm\sqrt{\lambda_2}]S^{-1},$$

其中根數可取正值或負值。

和公式(79)一樣,當 S 取到所有可能的取法時由(87)式可以得到方程(84)的所有的解。

如果我們在公式(87)中祇取正則值，即當 λ_1 和 λ_2 相等時根數也應取相同的符號,那末和對數的情形一樣,可以證明,公式(87)所決定的解和根數有關,但和 S 的選取無關。

一般,當 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 時公式(87)決定方程(84)的四個不相同的解。今設 $\lambda_1=\lambda_2$。這時

$$X=S[\lambda_1,\lambda_1]S^{-1}=\lambda_1 I,$$

其中 S 是行列式不等於零的任意的方陣。

由公式(87)有

$$X^{\frac{1}{2}}=S[\pm\sqrt{\lambda_1},\ \pm\sqrt{\lambda_1}]S^{-1}.$$

若上式中根數取相同的值,則得

$$X^{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{\lambda_1}\,I. \tag{88}$$

現在再看根數取不同值的情形。此時

$$X^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\lambda_1}\,S[1,-1]S^{-1}, \tag{89}$$

或

$$X^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{\lambda_1}\,S[1,-1]\,S^{-1}, \tag{90}$$

其中 S 是行列式不等於零的任意的方陣。寫出方陣 S 和 S^{-1} 的展開式:

$$S=\begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12}\\ s_{21} & s_{22}\end{Vmatrix};\quad S^{-1}=\begin{Vmatrix} s_{22}D^{-1} & -s_{12}D^{-1}\\ -s_{21}D^{-1} & s_{11}D^{-1}\end{Vmatrix}=D^{-1}\begin{Vmatrix} s_{22} & -s_{12}\\ -s_{21} & s_{11}\end{Vmatrix},$$

其中

$$D=D(S)=\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12}\\ s_{21} & s_{22}\end{vmatrix}=s_{11}s_{22}-s_{12}s_{21}.$$

公式(89)可以改寫如下:

$$X^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\lambda_1}\,D^{-1}\begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12}\\ s_{21} & s_{22}\end{Vmatrix}[1,-1]\begin{Vmatrix} s_{22} & -s_{12}\\ -s_{21} & s_{11}\end{Vmatrix},$$

或

$$X^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\lambda_1}(s_{11}s_{22}-s_{12}s_{21})^{-1}\begin{Vmatrix} s_{11}s_{22}+s_{12}s_{21}, & -2s_{11}s_{12}\\ 2s_{21}s_{22}, & -(s_{11}s_{22}+s_{12}s_{21})\end{Vmatrix}. \tag{91}$$

這樣,我們看到,平方根 $X^{\frac{1}{2}}$ 有無限多個數值,因爲其中所含方陣 S 的元素 s_{ik} 是相當任意的。

若 X 的初等因子爲(82)中各項,則 $X^{\frac{1}{2}}$ 的初等因子爲

$$(\lambda-\sqrt{\lambda_1})^{p_1},\ \cdots,\ (\lambda-\sqrt{\lambda_m})^{p_m},$$

又若當 λ_k 取相同數值時 $\sqrt{\lambda_k}$ 亦取相同數值,則所得 $X^{\frac{1}{2}}$ 的值稱爲正則。

公式(86)經過解析延拓後可以得到 $X^{\frac{1}{2}}$ 的所有正則值。但此時須設諸數 λ_k 無一爲零,因爲 $z=0$ 是函數 $\sqrt{z}$ 的奇異點。

93. 係數爲常數的線性方程組　設有係數爲常數的線性微分方程組:

$$(92)\quad \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

其中 x_k 是自變數 t 的函數，x_k' 是 x_k 的導數。

假設所求諸函數$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是某一向量

$$\vec{x}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

的支量。因爲諸 x_k 是 t 的函數，我們定義向量 $\vec{x}$ 關於 t 的微分爲一個以$(x_1', x_2', \cdots, x_n')$爲支量的向量：

$$\frac{\overrightarrow{dx}}{dt}(x_1', x_2', \cdots, x_n').$$

再設諸 a_{ik} 所成的方陣爲 A。由是方程組(92)可以改寫爲：

$$(93)\quad \frac{\overrightarrow{dx}}{dt} = A\vec{x}.$$

假設這方程的解滿足初始條件：

$$(94)\quad x_k\big|_{t=0} = x_k^{(0)} \qquad (k=1, 2, \cdots, n).$$

這些 $x_k^{(0)}$ 構成某一向量，記爲

$$\vec{x}^{(0)}(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}).$$

易見在初始條件(94)之下(93)的解爲：

$$(95)\quad \vec{x} = \left(I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots\right)\vec{x}^{(0)},$$

或引進方陣

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots$$

(95)式可以寫成

$$(96)\quad \vec{x} = e^{At}\vec{x}^{(0)}.$$

實際上，由(95)式有

$$\vec{x} = \vec{x}^{(0)} + \frac{t}{1!}A\vec{x}^{(0)} + \frac{t^2}{2!}A^2\vec{x}^{(0)} + \cdots$$

關於 t 微分得：

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}^{(0)}+\frac{t}{1!}A^2\vec{x}^{(0)}+\frac{t^2}{2!}A^3\vec{x}^{(0)}+\cdots$$

或

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\left(I+\frac{t}{1!}A+\frac{t^2}{2!}A^2+\cdots\right)\vec{x}^{(0)},$$

與(95)比較，得：

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}。$$

除此以外，初始條件(94)顯然也滿足，因為當 $t=0$ 時(95)式告訴我們 $\vec{x}|_{t=0}=\vec{x}^{(0)}$。

應用方陣表示法我們也可以將方程組(92)改寫成另外的形式。首先說明方陣的微分的基本規則。假設方陣 X 的元素都是自變數 t 的函數。定義 $\frac{dX}{dt}$ 為一方陣，他的元素是由 X 的元素關於 t 微分而得，即 [III_1, 74]

$$\left\{\frac{dX}{dt}\right\}_{ik}=\frac{d\{X\}_{ik}}{dt}。$$

由此定義立刻可得方陣的和的微分規則：即若 X 和 Y 為兩方陣，其元素皆為 t 的函數，則

$$\frac{d(X+Y)}{dt}=\frac{dX}{dt}+\frac{dY}{dt}。\tag{97}$$

與此相仿可證積的微分公式是：

$$\frac{d}{dt}(XY)=\frac{dX}{dt}Y+X\frac{dY}{dt},\tag{98}$$

注意，一般在(98)式中因子的先後次序不能任意更動。實際上，由方陣乘法的定義有：

$$\{XY\}_{ik}=\sum_{s=1}^{n}\{X\}_{is}\{Y\}_{sk},$$

從而

$$\frac{d\{XY\}_{ik}}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{d\{X\}_{is}}{dt}\{Y\}_{sk}+\sum_{s=1}^{n}\{X\}_{is}\frac{d\{Y\}_{sk}}{dt},$$

由此立刻得到(98)式。這公式可以推廣到任意幾個因子相乘的時候去。例如對三個因子的乘積有：

$$\frac{d}{dt}(XYZ)=\frac{dX}{dt}YZ+X\frac{dY}{dt}Z+XY\frac{dZ}{dt}。\tag{99}$$

現在再引進逆方陣的微分公式。假設方陣 X 的行列式不等於零，由是逆方陣 X^{-1} 存在，且滿足

$$XX^{-1}=1。$$

關於 t 微分這恆等式，得：

$$\frac{dX}{dt}X^{-1}+X\frac{dX^{-1}}{dt}=0,$$

由此卽得逆方陣的微分公式：

$$\frac{dX^{-1}}{dt}=-X^{-1}\frac{dX}{dt}X^{-1}。\tag{100}$$

現在回到方程組(92)來。我們看這方程組的 n 組解。他們顯然構成一個含有 n^2 個函數的正方表：

$$\left\|\begin{matrix}x_{11}(t), & x_{12}(t), & \cdots, & x_{1n}(t)\\ x_{21}(t), & x_{22}(t), & \cdots, & x_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{n1}(t), & x_{n2}(t), & \cdots, & x_{nn}(t)\end{matrix}\right\|\tag{101}$$

我們規定每一函數中的第一個足號表示這函數在他所屬的那一組中的次第，第二個足號表示他所屬的那一組的次第。例如 $x_{23}(t)$ 表示第三組解中的第二個函數 x_2。這樣我們就有：

$$\frac{dx_{ik}(t)}{dt}=a_{i1}x_{1k}(t)+\cdots+a_{in}x_{nk}(t),\quad (i, k=1, 2, \cdots, n)$$

從而方程組(92)就可改以方陣形式表示爲：

$$\frac{dX}{dt}=AX,\tag{102}$$

其中 X 卽方陣(101)。記住在這種寫法之下，方陣 X 給了方程組(93)的 n 組解，X 中每一行的元素表示方程組(93)的一組解。這時初始條件是方陣 X 當 $t=0$ 時所應滿足的條件，設爲

(103) $$X\big|_{t=0}=X^{(0)},$$

其中 $X^{(0)}$ 是個以常數爲元素的任意已給方陣。如前可證在初始條件(103)之下方程組(102)的解爲

(104) $$X=e^{At}X^{(0)}。$$

現在假設 $X^{(0)}$ 的行列式不等於零，我們要證明對於所有的 t 方陣 X 的行列式也不等於零。由公式(104)看出，爲此祇須證明方陣 e^{At} 的行列式不等於零卽可，因爲兩方陣之積的行列式等於兩方陣的行列式之積。

一般我們容易證明方陣的指數函數 e^Y 的行列式常不等於零。實際上，與方陣

(105) $$e^Y=I+\frac{Y}{1!}+\frac{Y^2}{2!}+\cdots+\frac{Y^n}{n!}+\cdots$$

同時可作方陣

(106) $$e^{-Y}=I-\frac{Y}{1!}+\frac{Y^2}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{Y^n}{n!}+\cdots$$

將以上兩級數相乘時我們祇遇到數字和同一方陣 Y 的諸乘冪，卽所有的因子都是可以互相交換次序的。因此我們要得到這兩個方陣級數的乘積時可以把 Y 和變數 z 同樣看待。但由恆等式 $e^ze^{-z}=1$ 可知(105)式和(106)式的右邊兩級數相乘之積爲單位方陣，因此得到下面的恆等式：

$$e^Ye^{-Y}=I,$$

這式對於任一方陣 Y 皆成立。由此恆等式可知方陣 e^{-Y} 是 e^Y 的逆方陣，從而方陣 e^Y 的行列式必不等於零。注意：若 Y 和 Z 是兩個不可交換的不同方陣，則一般 $e^Ye^Z\neq e^{Y+Z}$。

由(104)式和剛才證明的方陣指數函數的性質可知當 $X^{(0)}$ 的行列式不等於零時，方陣 X 的行列式對於所有的 t 常不等於零。這時方陣 X 決定(102)的 n 組線性獨立的解。下面要證明：如果方陣 Y 決定(102)的 n 組解，則 Y 可藉下式以 X 來表示：

(107) $$Y=XB,$$

其中 B 是個以常數為元素的方陣。(107)式說明方程組(102)的任何一組解常可藉 n 組線性獨立的解線性地表示出來。要證明(107)式首先注意 Y 也應滿足(102)式，即

(108) $$\frac{dY}{dt}=AY。$$

又已知方陣 X 的行列式不等於零，故逆方陣 X^{-1} 存在。由逆方陣的微分規則得：

$$\frac{dX^{-1}}{dt}=-X^{-1}\frac{dX}{dt}X^{-1}。$$

因 X 也滿足(102)式，故

(109) $$\frac{dX^{-1}}{dt}=-X^{-1}AXX^{-1}=-X^{-1}A。$$

又由乘積的微分規則有：

$$\frac{d}{dt}(X^{-1}Y)=\frac{dX^{-1}}{dt}Y+X^{-1}\frac{dY}{dt},$$

由(108)和(109)得：

$$\frac{d}{dt}(X^{-1}Y)=-X^{-1}AY+X^{-1}AY,$$

即 $$\frac{d}{dt}(X^{-1}Y)=0。$$

由此知道乘積 $X^{-1}Y$ 是一個方陣 B，其元素和 t 無關，(107)式遂得證明。

94. 幾個方陣的函數 現在講一點關於幾個方陣的函數的基本概念和事實。由於方陣的不可交換性，幾個變方陣的函數的理論遠較一

個變方陣的函數的理論爲繁複，因此我們現在祇看一些最基本的東西。

先從多項式開始。兩個方陣的一般二次齊次式爲

$$aX_1^2+bX_1X_2+cX_2X_1+dX_2^2.$$

l 個方陣的二次齊次多項式爲

$$\sum_{i,k=1}^{l} a_{ik}X_iX_k,$$

其中足號 i 和 k 各自獨立地跑過從 1 到 l 的所有正整數。

l 個方陣的 m 次齊次多項式的一般形式爲：

$$\sum_{j_1,\cdots,j_m=1}^{l} a_{j_1\cdots j_m}X_{j_1}\cdots X_{j_m}. \tag{110}$$

如前 $a_{j_1\cdots j_m}$ 是數字係數，又每一 j_k 都跑過從 1 到 l 的所有正整數。因此在(110)式中一共包含 l^m 項。現在看一個特別情形，即當所有的 $a_{j_1\cdots j_m}$ 都等於 1 的情形：

$$\sum_{j_1,\cdots,j_m=1}^{l} X_{j_1}\cdots X_{j_m}. \tag{111}$$

易見(111)式中的和可以表示爲諸方陣 X_{j_k} 的和的乘冪：

$$(X_1+\cdots+X_l)^m=\sum_{j_1,\cdots,j_m=1}^{l} X_{j_1}\cdots X_{j_m}. \tag{112}$$

例如

$$(X_1+X_2)^2=(X_1+X_2)(X_1+X_2)=X_1^2+X_1X_2+X_2X_1+X_2^2.$$

現在考察 l 個方陣的冪級數。這種級數的形式如下：

$$a_0+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j_1,\cdots,j_m=1}^{l} a_{j_1\cdots j_m}X_{j_1}\cdots X_{j_m}. \tag{113}$$

關於這種級數的收斂性的詳細研究遠較一個方陣的冪級數時爲難，現在我們祇證明級數(113)爲絕對收斂的一個充分條件。和一個方陣的級數一樣，當級數

$$|a_0|+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j_1,\cdots,j_m=1}^{l} |a_{j_1\cdots j_m}|\,|X_{j_1}|\cdots|X_{j_m}| \tag{114}$$

收斂時級數(113)稱爲絕對收斂，此時級數(113)的和與各項的順序無

關。固定正整數 m，記 $a^{(m)}$ 爲 $|a_{j_1\cdots j_m}|$ 的最大值，卽

(115) $$|a_{j_1\cdots j_m}|\leqslant a^{(m)}。$$

做一個普通複變數 z 的級數

(116) $$\sum_{m=1}^{\infty} a^{(m)}z^m,$$

設其收斂半徑爲 $n\rho$，這裏 n 是方陣的階數。在級數(114)中所有的係數 $|a_{j_1\cdots j_m}|$ 都以 $a^{(m)}$ 代替，則得級數

$$|a_0|+\sum_{m=1}^{\infty} a^{(m)}\sum_{j_1,\cdots,j_m=1}^{l}|X_{j_1}|\cdots|X_{j_m}|,$$

這級數顯然可以改寫爲：

(117) $$|a_0|+\sum_{m=1}^{\infty} a^{(m)}(|X_1|+\cdots+|X_l|)^m。$$

級數(117)可視爲方陣

$$Z=|X_1|+\cdots+|X_l|$$

的冪級數。因級數(116)的收斂半徑等於 $n\rho$，故知 [86] 級數(117)當

(118) $$|X_1|+\cdots+|X_l|<\|\rho\|$$

時爲收斂。此時級數(114)自然也收斂。故得

定理 設正數 $a^{(m)}$ 由條件(115)決定，又級數(116)的收斂半徑爲 $n\rho$，則當條件(118)滿足時級數(113)絕對收斂。

特別當級數(116)的收斂半徑等於無限大時級數(113)對於任意的 X_k 常爲絕對收斂。

注意：由收斂級數(113)所決定的函數 $f(X_1,\cdots,X_l)$ 顯然滿足下面的關係：

$$f(SX_1S^{-1},\cdots,SX_lS^{-1})=Sf(X_1,\cdots,X_l)S^{-1},$$

其中 S 是任一行列式不等於零的方陣。我們前面早知道一個方陣的解析函數也有與此完全相似的性質。

最後再說一說幾個方陣的冪級數的唯一性定理，這定理和一個方陣的情形不同，證明從略。定理是這樣：如果等式

$$a_0+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j_1,\cdots,j_m=1}^{l}a_{j_1\cdots j_m}X_{j_1}\cdots X_{j_m}=b_0+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j_1,\cdots,j_m=1}^{l}b_{j_1\cdots j_m}X_{j_1}\cdots X_{j_m}$$

對於所有任何階的和零方陣相當鄰近的方陣

$$X_1,\ \cdots,\ X_l$$

常常成立，則 $b_0=a_0$，$b_{j_1\cdots j_m}=a_{j_1\cdots j_m}$。

若在這定理中除去任何階數的要求，則定理不一定成立。特別，我們可以做一個係數不全為零的齊次多項式

$$\sum_{j_1,\cdots,j_m=1}^{l}c_{j_1\cdots j_m}X_{j_1}\cdots X_{j_m},$$

他對於某一定階數的所有方陣 X_s 是恆等於零的。

方陣的解析函數的一般理論及其對於線性微分方程組的理論的應用可以在已故的 И.А. 拉坡—達尼列夫斯基的著作中找到，載於列寧格勒物理-數學協會的雜誌中。И. А. 拉坡—達尼列夫斯基去世後遺留下的全部材料，現在已經在科學院數學研究所彙報中發表了。

第五章　線性微分方程

95. 解的冪級數展開式　在第二卷中我們曾經研究過係數非常數的二階線性微分方程以及這類方程的冪級數解法。那時我們祇指出某種冪級數可以在形式上滿足我們的微分方程，但卻沒有證明級數的收斂性。現在我們要有系統地來詳細研究二階線性微分方程，其係數爲複變數的解析函數。因此，微分方程中的自變數也假定是複變數，而所求的解和方程的係數則是這複變數的解析函數。

假設有一二階線性方程：

(1)
$$w''+p(z)w'+q(z)w=0,$$

其中 w' 和 w'' 是所求的函數 w 關於複變數 z 的導數。

又設有如下的初始條件：

(2)
$$w|_{z=z_0}=c_0;\quad w'|_{z=z_0}=c_1。$$

再設係數 $p(z)$ 和 $q(z)$ 是圓 $|z-z_0|<R$ 中的正則函數。現在要證明存在這圓內的一個正則函數，他是方程(1)的解，並且滿足條件(2)。引進另一函數 $u=w'$ 可將方程(1)改寫成兩個聯立一階微分方程組：

$$\frac{du}{dz}=-p(z)u-q(z)w;\quad \frac{dw}{dz}=u。$$

爲了以後書寫式子整齊起見，我們考察有兩個未知函數的一般聯立線性方程組：

(3)
$$\frac{du}{dz}=a(z)u+b(z)v;\quad \frac{dv}{dz}=c(z)u+d(z)v。$$

並且要證明這聯立方程組有在圓 $|z-z_0|<R$ 內爲正則的解，他滿足任意已給的初始條件：

(4)
$$u|_{z=z_0}=\alpha;\quad v|_{z=z_0}=\beta,$$

但須假設(3)中諸係數都是圓 $|z-z_0|<R$ 內部的正則函數。

爲此，我們又要應用第二卷中已經用過的逐步迫近法了。全部證

明的過程也是和那裏完全一樣的。代替聯立方程組(3)和初始條件(4)我們可將方程組寫成如下的積分形式：

(5) $u=\alpha+\int_{z_0}^{z}[a(z)u+b(z)v]dz;\quad v=\beta+\int_{z_0}^{z}[c(z)u+d(z)v]dz$。

設以 K 代表圓 $|z-z_0|<R_1$，其中 R_1 是個小於 R 的正數。方程的諸係數是這圓內部直到境界線上的正則函數，因此成立不等式：

(6) $|a(z)|<M;\quad |b(z)|<M;\quad |c(z)|<M;\quad |d(z)|<M,$

其中 M 是個一定的正數。應用逐步迫近法，假設：

(7) $u_0(z)=\alpha;\quad v_0(z)=\beta,$

一般

(8) $$\begin{cases}u_{n+1}(z)=\alpha+\int_{z_0}^{z}[a(z)u_n+b(z)v_n]dz\\ v_{n+1}(z)=\beta+\int_{z_0}^{z}[c(z)u_n+d(z)v_n]dz\text{。}\end{cases}$$

在上式每一積分中被積分函數常爲 z 的正則函數，又每一積分的數值皆與圓 K 內部的積分路線無關。再設 m 爲一正數，由下面兩不等式決定：

(9) $|\alpha|\leqslant m;\quad |\beta|\leqslant m$。

爲簡單起見，以後假設 $z_0=0$，又積分常沿從 0 到 z 的直線。此時

(10) $z=\rho e^{i\varphi};\quad dz=e^{i\varphi}d\rho$。　$(0\leqslant\rho\leqslant R_1)$

(8)式中第一個式子當 $n=0$ 時爲：

$$u_1(z)-\alpha=\int_0^{\rho}[a(z)\alpha+b(z)\beta]e^{i\varphi}d\rho\text{。}$$

將積分符號下每一項以其模代替，然後應用(6)式和(7)式，卽得：

(11_1) $|u_1(z)-u_0(z)|\leqslant 2Mm\rho,$

同樣可得另一不等式：

(11_2) $|v_1(z)-v_0(z)|\leqslant 2Mm\rho$。

(8)式中第一個式子當 $n=1$ 時爲：

$$u_2(z)=\alpha+\int_0^{z}[a(z)u_1+b(z)v_1]dz,$$

由此式減去對應於 $n=0$ 時的一式卽得：

$$u_2(z)-u_1(z)=\int_0^z[a(z)(u_1-u_0)+b(z)(v_1-v_0)]\,dz\text{。}$$

再將積分符號下每一項以其模代替，然後應用不等式(11_1)和(11_2)卽得：

$$|v_2(z)-u_1(z)|\leqslant(2M)^2m\int_0^\rho\rho\,d\rho$$

或
$$|u_2(z)-u_1(z)|\leqslant m\frac{(2M\rho)^2}{2!},$$

同樣可得另一不等式：

$$|v_2(z)-v_1(z)|\leqslant m\frac{(2M\rho)^2}{2!}\text{。}$$

這樣繼續做下去，可得：

$$|u_{n+1}(z)-u_n(z)|\leqslant m\frac{(2M\rho)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$|v_{n+1}(z)-v_n(z)|\leqslant m\frac{(2M\rho)^{n+1}}{(n+1)!}\text{。}$$

由此立刻可知在圓 $|z-z_0|<R_1$ 中級數

$$u_0+[u_1(z)-u_0]+[u_2(z)-u_1(z)]+\cdots \tag{12}$$

的一般項的模小於正數

$$m\frac{(2M\rho)^{n+1}}{(n+1)!},$$

但是以此數爲一般項的級數是收斂的，故知級數(12)在圓 $|z-z_0|<R_1$ 中絕對且一致收斂。這級數最先 $(n+1)$ 項之和恰爲 $u_n(z)$，故知 $u_n(z)$ 在圓 $|z-z_0|<R_1$ 中一致趨向一函數 $u(z)$。同樣 $v_n(z)$ 亦一致趨向一函數 $v(z)$。由維爾史特拉斯關於一致收斂級數的定理知道這兩極限函數也是圓 K 內部的正則函數。回到公式（8）知道第一式中的被積分函數一致地趨向極限

$$a(z)u+b(z)v\text{。}$$

但是如[I, 146]中所已知，一致收斂級數可以逐項積分，亦卽：一致

收斂函數列的積分取極限時可以將極限移到積分符號裏面去。因此將(8)中兩式取極限,可知極限函數 u 和 v 確能滿足方程(5)。在(5)中置 $z=z_0$,可知 u 和 v 也滿足初始條件(4)。又將(5)微分,可知 u 和 v 確是聯立方程(3)的解。

回到方程(1),我們知道他是方程組(3)的特別情形。因此我們已證:在圓 $|z-z_0|<R$ 的內部任何以 z_0 爲中心的圓中存在這方程的解,滿足對於任意的 c_0 和 c_1 的初始條件(2)。函數 $p(z)$和 $q(z)$在圓 $|z-z_0|<R$ 內部可以展開爲冪級數

$$p(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots;\quad q(z)=b_0+b_1(z-z_0)+\cdots$$

由前知方程的解也是正則函數,所以也應該可以展開爲冪級數,由(2)式知展開式中前面兩個係數等於 c_0 和 c_1:

(13) $$w=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots$$

將這級數代入方程(1),$z-z_0$ 的所有不同冪次的係數均應等於零,這樣,就和我們在[II, 45]中所已知一樣,得到許多方程:

$$2\cdot1\cdot c_2+a_0c_1+b_0c_0=0$$

$$3\cdot2c_3+2a_0c_2+a_1c_1+b_0c_1+b_1c_0=0,$$

....

由這些方程可以逐步的決定諸係數 c_k。因此,首先我們就知道,所求的解祇可能有一個,不能多於一個。但是由前面的證明,我們也知道這一個解確實存在,就是說,將這樣求得的係數 c_k 代入(13)式時級數在圓 $|z-z_0|<R$ 內部任何一圓中必爲收斂,簡單些說,卽級數在圓 $|z-z_0|<R$ 的內部收斂。因此我們得到下面的基本定理:

定理 I. 若方程(1)的係數爲圓 $|z-z_0|<R$ 中的正則函數,c_0 和 c_1 爲任意常數,則在這圓中存在方程(1)的唯一的解,滿足初始條件(2)。

給 c_0 和 c_1 以一定的數值,我們可以求得方程的兩個解 w_1 和 w_2,滿足下面的初始條件:

$$w_1|_{z=z_0}=\alpha_1;\quad w_1'|_{z=z_0}=\beta_1,$$

$$w_2|_{z=z_0}=\alpha_2;\quad w_2'|_{z=z_0}=\beta_2\text{。}$$

若

(14) $$\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$$

則任何在圓 $|z-z_0|<R$ 中爲正則的解常可藉 w_1 和 w_2 來表示：

(15) $$w=A_1w_1+A_2w_2\text{。}$$

實際上，如果解 w 滿足初始條件(2)，則對常數 A_1 和 A_2 應有下面的聯立方程組：

$$A_1\alpha_1+A_2\alpha_2=c_0;\quad A_1\beta_1+A_2\beta_2=c_1\text{。}$$

由(14)式知 A_1 和 A_2 的數值可由上二方程唯一決定。以上所得的兩解 w_1 和 w_2 顯然是方程(1)的兩個互爲線性獨立的解[II, 24]。

注意：對方程組(3)應用逐步迫近法我們得到一個無窮級數(12)，他決定了函數 u。當然，這級數並非冪級數，但是他在圓 $|z-z_0|<R_1$ 中的一致收斂性卻保證在這圓中存在正則的，可展開爲冪級數的解。我們可以在任意的區域中做出函數 $u_n(z)$ 和級數(12)來，祇要方程組(3)的係數是該區域中的正則函數。如前可證在這區域中級數(12)以及收斂於 v 的另一級數都是一致收斂，並且決定方程組(3)在這區域中的解。這些級數我們以後還有研究的時候。

96. 解的解析延拓　現在假設方程(1)的係數 $p(z)$ 和 $q(z)$ 是複變數平面上區域 B 中的正則函數。取這方程的一個解來，假設在 B 內部 z_0 這點它滿足一定的初始條件(2)。由上節的證明知道在一個以 z_0 爲中心而全部位於 B 內部的圓中這解可以用收斂的冪級數來表示(但亦可能在一個更大的圓中)。這級數具有(13)式的形式。今在這級數的收斂圓內部另取一點 z_1，再將級數改依 $(z-z_1)$ 的冪展開，如我們以前做一個函數的解析延拓時一樣的辦法。這樣，我們就得到另一級數

(16) $$\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z-z_1)^k\text{。}$$

在級數(13)的收斂圓和級數(16)的收斂圓的公共部分裏，級數(16)

的和應與 w 全同。因此在這公共部分中級數(16)的和 $f(z)$ 是方程(1)的解，就是說，以 $w=f(z)$ 代入方程(1)的左邊時，常使他在級數(16)的收斂圓的一部分中等於零。但是由解析延拓的基本原理，他就應在收斂圓和 B 的公共部分中處處等於零。所以級數(16)也是方程(1)的解。這解由他在 z_1 這點所滿足的初始條件

$$f(z_1)=w|_{z=z_1};\quad f'(z_1)=w'|_{z=z_1}$$

完全決定，其中 w 是由始級數(13)所定義的。

由上節已證明的定理可知：若 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在區域 B 中為正則，那末級數(16)在一個以 z_1 為中心而全部屬於 B 的圓中必為收斂。因此我們得到下面的定理：

定理 II. 若方程(1)的係數 $p(z)$ 和 $q(z)$ 是區域 B 中的正則函數，則凡可藉以 B 的內點為中心的冪級數來表示的解常可沿 B 內任意線路被解析延拓出去，由解析延拓所得到的仍是方程(1)的解。

對於這定理有幾點重要的補充：當 B 為單通區域時由解析延拓的基本性質知 w 在區域 B 中為單值正則函數[18]，這單值正則函數是方程(1)的解。當 B 為複通區域時，一般，w 並非 B 中的單值函數。

若 w_1 和 w_2 是方程(1)的兩個解，則有下面的公式[II, 24]：

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)=\frac{C}{w_1^2}e^{-\int_{z_0}^{z_1}p(z)dz},\tag{17}$$

其中 C 為一常數。若 $C\neq 0$，則上式左邊在解析延拓的過程中常不等於零，故知線性獨立的解經過解析延拓後仍為線性獨立：依據公式(15)由兩個線性獨立解的解析延拓就可得到任一解的解析延拓。

例如，若係數 $p(z)$ 和 $q(z)$ 是有理函數，則方程的任一解常可沿平面上任一不經過 $p(z)$ 和 $q(z)$ 的極點的路線被解析延拓出去。

97. 奇異點的鄰域 現在研究方程(1)的解在係數 $p(z)$ 和 $q(z)$ 的奇異點鄰域中的行為。假設 $z=z_0$ 是係數 $p(z)$ 和 $q(z)$ 的極點或本性奇異點，則在以 z_0 為中心，內半徑等於零的某一環域 K 中這兩係數

可展開為羅朗級數：

$$p(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k, \tag{18}$$

$$q(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}b_k(z-z_0)^k。\qquad (0<|z-z_0|<R)$$

方程(1)的任一解可以在 K 的內部以任意方法被解析延拓，但當繞過 $z=z_0$ 一週後這解 w 的數值可能已經變過，就是說，一般而論，$z=z_0$ 是 w 的支點。現在我們更詳細地來研究這種支點的特性。取方程的任意兩個線性獨立的解 w_1 和 w_2。若從環的中心沿任一半徑引一割線，則得一單通區域，解 w_1 和 w_2 在這單通區域中為單值正則，但在割線的兩岸他們將取不同的數值。換言之，繞過 $z=z_0$ 一週以後，函數 w_1 和 w_2 將變成另二函數 w_1^+ 和 w_2^+。這兩函數仍應是方程的解，因此他們必可表示為 w_1 和 w_2 的線性組合，故得下面二式：

$$\begin{cases}w_1^+=a_{11}w_1+a_{12}w_2,\\ w_2^+=a_{21}w_1+a_{22}w_2,\end{cases} \tag{19}$$

其中 a_{ik} 是常數。換言之，繞過奇異點一週後線性獨立的二解經過一次線性變換。易見

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0。 \tag{20}$$

實際上，若有 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$，則 w_1^+ 和 w_2^+ 祇差一個常數因子，故必非線性獨立，但這是不可能的，因為我們早已知道線性獨立的解經過解析延拓後仍舊得到線性獨立的解。線性變換(19)當然繫於 w_1 和 w_2 的選取。

現在要找這種解，他繞過奇異點一週後其結果祇是乘上一個常數，就是說，他所受到的線性變換有最簡單的形狀：

$$w^+=\lambda w。 \tag{21}$$

這種解，如果存在的話，應該是 w_1 和 w_2 的線性組合：

$$w=b_1w_1+b_2w_2,$$

我們現在要求出係數 b_1 和 b_2。由(21)式應有：

$$b_1 w_1^+ + b_2 w_2^+ = \lambda(b_1 w_1 + b_2 w_2),$$

以(19)的兩式代入上式，得：

$$b_1(a_{11} w_1 + a_{12} w_2) + b_2(a_{21} w_1 + a_{22} w_2) = \lambda(b_1 w_1 + b_2 w_2)。$$

因 w_1 和 w_2 是線性獨立，比較等式兩邊 w_1 和 w_2 的係數，我們得到關於 b_1 和 b_2 的一組齊次方程：

(22)
$$(a_{11}-\lambda)b_1 + a_{21} b_2 = 0,$$
$$a_{12} b_1 + (a_{22}-\lambda)b_2 = 0。$$

要得到不恆等於零的解，(22)式的行列式必須要等於零：

(23)
$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0。$$

這是 λ 的二次方程。取這方程的一根 $\lambda=\lambda_1$ 代入(22)式求出 b_1 和 b_2，卽得方程(1)的一個非零的解。這樣，方程(23)的根就是(21)式中因子 λ 的可能值，就是說，假如方程(1)的解以正方向繞過奇異點 z_0 一週後其結果祇是乘上一個常數因子，則這常數因子必爲二次方程(23)的根。如果我們改從另外一對線性獨立的解出發，那末線性變換(19)當然也要變過，但方程(23)的根卻不應改變，因爲他們具有如上所述的完全確定的意義，和基本解 w_1 與 w_2 的選取無關。

現在我們先看二次方程(23)有兩個不同的根

$$\lambda=\lambda_1 \quad 和 \quad \lambda=\lambda_2$$

的情形。這時我們得到方程(1)的兩個解，滿足條件：

(24)
$$w_1^+ = \lambda_1 w_1; \quad w_2^+ = \lambda_2 w_2。$$

這兩個解應爲線性獨立。實際上，如非線性獨立，則 $\frac{w_2}{w_1}$ 必爲常數值，繞過奇異點後其值不變，但由(24)式知道當繞過奇異點後 $\frac{w_2}{w_1}$ 獲得一個乘數 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$，矛盾。注意：由(20)式可知 λ_1 和 λ_2 都不等於零。

現在引進兩數

(25)
$$\rho_1 = \frac{1}{2\pi i}\lg\lambda_1; \quad \rho_2 = \frac{1}{2\pi i}\lg\lambda_2,$$

其中對數值可任意取。做兩個函數：

$$(z-z_0)^{\rho_1}=e^{\rho_1 \lg(z-z_0)}; \quad (z-z_0)^{\rho_2}=e^{\rho_2 \lg(z-z_0)}。$$

繞過奇異點後，他們各自獲得乘數

$$e^{\rho_1 2\pi i}=e^{\lg \lambda_1}=\lambda_1; \quad e^{\rho_2 2\pi i}=e^{\lg \lambda_2}=\lambda_2。$$

由是比
$$\frac{w_1}{(z-z_0)^{\rho_1}} \text{ 和 } \frac{w_2}{(z-z_0)^{\rho_2}}$$
繞過奇異點後保持單值，就是說，他們是 $z=z_0$ 鄰近的正則單值函數，因此在這點的鄰域中可依羅朗級數展開。這樣，我們所求的解在奇異點鄰域中就有如下的展開式：

$$(26) \qquad \begin{cases} w_1=(z-z_0)^{\rho_1}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k'(z-z_0)^k, \\ w_2=(z-z_0)^{\rho_2}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k''(z-z_0)^k。\end{cases}$$

注意：決定 $\lg\lambda$ 的數值時可以相差一項 $2m\pi i$，m 是任意整數。因此由(25)式知道，決定 ρ_1 和 ρ_2 的數值時可能相差一個整數。這事和公式(26)完全無衝突，因為以$(z-z_0)^m$ 乘一個羅朗級數，m 是任意整數，結果仍舊得到一個羅朗級數。這事實說明，在公式(26)中，指數 ρ_1 和 ρ_2 的數值除了一個整數以外是可以完全決定的。

再看方程(23)兩根相等的情形，即 $\lambda_1=\lambda_2$。這時如前可求得一解滿足條件

$$(27) \qquad w_1^+=\lambda_1 w_1。$$

任取另一與 w_1 線性獨立的解 w_2。繞過奇異點一週後他受到線性變換

$$(28) \qquad w_2^+=a_{21}w_1+a_{22}w_2。$$

對於這兩個解二次方程(23)成為：

$$\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda, & a_{21} \\ 0, & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0。$$

由假設這二次方程應有重根 $\lambda=\lambda_1$，由此立刻得到 $a_{22}=\lambda_1$，即(28)

式應取如下的形式：

(29) $$w_2^+=\lambda_1 w_2+a_{21} w_1。$$

由(27)式和(29)式知比 $\frac{w_2}{w_1}$ 繞過奇異點一週後祗得一個常數項的增加：

$$\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^+=\left(\frac{w_2}{w_1}\right)+\frac{a_{21}}{\lambda_1},$$

因此 $$\frac{w_2}{w_1}-\frac{a_{21}}{2\pi i \lambda_1}\lg(z-z_0)=\frac{w_2}{w_1}-a\lg(z-z_0)$$

繞奇異點一週後數值不變，故可展開為羅朗級數。因 w_1 已可照(26)式展開，又任一羅朗級數與 w_1 之乘積仍具 w_1 之形式，所以現在我們所求的兩解在奇異點鄰近有如下的表示式：

(30) $$\begin{cases} w_1=(z-z_0)^{\rho_1}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k'(z-z_0)^k, \\ w_2=(z-z_0)^{\rho_1}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k''(z-z_0)^k+aw_1\lg(z-z_0)。\end{cases}$$

這樣，我們就得到下面的定理：

定理 III. 若 $z=z_0$ 為係數 $p(z)$ 和 $q(z)$ 的極點或本性奇異點，則存在兩個線性獨立的解，他們在這點的鄰近可表示成(26)或(30)的形式。

注意：在第二種情形，即當方程(23)有重根時，常數 a_{21} 以及和他有關的常數

$$a=\frac{a_{21}}{2\pi i\lambda_1}$$

仍可能等於零，這時在 z_0 鄰近的表示式仍是(26)的形式。

以上所講的都是 z_0 為有限遠點的情形。要研究 z_0 為平面上的無限遠點時的情形，我們應由

$$z=\frac{1}{t};\quad t=\frac{1}{z}$$

引進另一自變數 t 以替代 z，再將關於 z 的微分改為關於 t 的微分，即

$$\frac{d}{dz}=-t^2\frac{d}{dt};\quad \frac{d^2}{dz^2}=t^4\frac{d^2}{dt^2}+2t^3\frac{d}{dt},$$

這時方程（1）亦變爲以 t 作自變數的方程：

$$(31)\qquad t^4\frac{d^2w}{dt^2}+\left[2t^3-t^2p\left(\frac{1}{t}\right)\right]\frac{dw}{dt}+q\left(\frac{1}{t}\right)w=0\ 。$$

對這方程而言，從前的無限遠點現在變成 $t=0$ 這點了，因此我們又可以像以前一樣來研究方程的解在這點鄰域中的性質。

注意：以上所講的完全是抽象的理論，他並沒有告訴我們任何具體的方法來決定方程(23)以及(26)式和(30)式中的係數。下面我們立刻就要研究決定(26)和(30)式中諸係數以及指數 ρ 的實際問題。但是我們祇能在一種情形下研究這個問題，就是當各展開式中祇有有限個含負數羃的項的時候。

這時奇異點 $z=z_0$ 稱爲正則奇異點，就是說，如果羅朗展開式(26)或(30)中祇有有限個含負羃的項，則方程（1）中係數的極點或本性奇異點稱爲這方程的正則奇異點。在正則奇異點的情形將 ρ_1 和 ρ_2 增減一個整數，我們常可使(26)或(30)式中的羃級數完全不含負數羃的項，而以常數項開始。就是說在正則奇異點的情形下，例如，代替(26)式我們可以有：

$$(26_1)\qquad \begin{cases} w_1=(z-z_0)^{\rho_1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}c'_k(z-z_0)^k\ , \\ w_2=(z-z_0)^{\rho_2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}c''_k(z-z_0)^k\ 。\end{cases}\qquad (c'_0,\ c''_0\neq 0)。$$

另一方面，祇要(26)或(30)中任一展開式有無限個含負羃的項，奇異點卽稱爲非正則。我們首先必須要找出一個準則來，藉此可以由方程的係數來判定奇異點是否爲正則。

98. 正則奇異點　假設 w_1 和 w_2 是兩個互爲線性獨立的解析函數。不難做出一個以 w_1 和 w_2 爲解的線性方程來。實際上，我們應有：

$$w''_1+p(z)w'_1+q(z)w_1=0;\quad w''_2+p(z)w'_2+q(z)w_2=0,$$

由此卽可決定方程的係數[II, 24]：

$$(32)\qquad p(z)=-\frac{w''_2w_1-w''_1w_2}{w'_2w_1-w'_1w_2},$$

$$q(z)=-\frac{w_1''}{w_1}-p(z)\frac{w_1'}{w_1}。\tag{33}$$

假設 $z=z_0$ 是正則奇異點。我們祇看 $\rho_1\neq\rho_2$ 的情形,因爲對(30)式的情形我們可以用完全同樣的方法去研究他的。以後我們用 $P_k(z-z_0)$ 表示一個依 $(z-z_0)$ 的正整數冪展開,而且常數項不等於零的級數。由 $z=z_0$ 是正則奇異點的條件可將兩解寫成下面的形式:

$$w_1=(z-z_0)^{\rho_1}P_1(z-z_0);\quad w_2=(z-z_0)^{\rho_2}P_2(z-z_0)。$$

由是
$$\frac{w_2}{w_1}=(z-z_0)^{\rho_2-\rho_1}P_3(z-z_0),$$

因爲兩個常數項不等於零的冪級數的商仍爲一常數項不等於零的冪級數。其次,我們有:

$$\Delta(z)=w_2'w_1-w_1'w_2=w_1^2\frac{d}{dz}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)=$$
$$=(z-z_0)^{2\rho_1}P_4(z-z_0)[(z-z_0)^{\rho_2-\rho_1}P_3(z-z_0)]',$$

或將乘積的導數算出來,再從方括弧內分出一個因子 $(z-z_0)^{\rho_2-\rho_1-1}$:

$$\Delta(z)=(z-z_0)^{\rho_1+\rho_2-1}P_5(z-z_0),$$

再關於 z 微分,得:

$$\Delta'(z)=(\rho_1+\rho_2-1)(z-z_0)^{\rho_1+\rho_2-2}P_5(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_1+\rho_2-1}P_5'(z-z_0)。$$

由是
$$p(z)=-\frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)}=\frac{1-\rho_1-\rho_2}{z-z_0}+\frac{P_5'(z-z_0)}{P_5(z-z_0)},$$

即 $p(z)$ 可能以 $z=z_0$ 爲極點,但不高於一階。

微分 w_1 的展開式立刻可知 $\frac{w_1'}{w_1}$ 可能以 z_0 爲不高於一階的極點,而 $\frac{w_1''}{w_1}$ 可能以 z_0 爲不高於二階的極點。由(33)式知 $q(z)$ 可能以 z_0 爲不高於二階的極點。

因此我們得到下面的定理:

定理 I.　z_0 是正則奇異點的必要條件是:係數 $p(z)$ 以 z_0 爲不高於一階的極點,$q(z)$ 以 z_0 爲不高於二階的極點,就是說,方程(1)應具如下的形式:

$$(34)\qquad w''+\frac{p_1(z)}{z-z_0}w'+\frac{q_1(z)}{(z-z_0)^2}w=0,$$

其中 $p_1(z)$ 和 $q_1(z)$ 都是在 z_0 為正則的函數。

現在證明對於奇異點的正則性這條件不僅是必要的而且也是充分的。回憶我們在[II, 47]中就已考察過形式如(34)的方程,並且做出了他的廣義冪級數的形式上的解。不過那時我們並沒有研究過這樣做出來的級數的收斂問題。現在我們就要來解決這個問題,證明這形式上做起來的級數確為收斂,並且是方程的解。為簡單起見假設 $z_0=0$。

以 z^2 乘方程(34),並改寫成:

$$(35)\qquad z^2w''+z(a_0+a_1z+\cdots)w'+(b_0+b_1z+\cdots)w=0,$$

現在要求這方程的形式如:

$$(36)\qquad w=z^\rho\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$$

的解。

將(36)式代入(35)式的左邊,再置各個不同冪次的 z 的係數為零,即得決定係數 c_k 的許多方程。這些方程是:

$$(37)\qquad \begin{cases} c_0f_0(\rho)=0\\ c_1f_0(\rho+1)+c_0f_1(\rho)=0\\ c_2f_0(\rho+2)+c_1f_1(\rho+1)+c_0f_2(\rho)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_nf_0(\rho+n)+c_{n-1}f_1(\rho+n-1)+\cdots+c_0f_n(\rho)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

其中為簡單計我們引用了下列的記號:

$$(38)\qquad \begin{cases} f_0(\lambda)=\lambda(\lambda-1)+\lambda a_0+b_0\\ f_k(\lambda)=\lambda a_k+b_k \end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)。$$

如前已述,我們可設 $c_0\neq0$,由是(37)的第一式給我們一個決定指數 ρ 的二次方程:

$$(39)\qquad f_0(\rho)=\rho(\rho-1)+\rho a_0+b_0=0。$$

這方程通常稱為在這奇異點的判定方程。今設 ρ_1 是方程的一根,

使得對於所有的正整數 n 成立條件:

$$f_0(\rho_1+n)\neq 0 \qquad (n=1,2,\cdots)。 \tag{40}$$

這時(37)中從第二式開始的各方程就可利用來決定 $c_1, c_2, \cdots$。第一個係數 c_0 是任意的,顯然,他是處在一個任意常數因子的地位,故不妨設 $c_0=1$。我們現在還須證明這樣得出的級數(36)在 $z=0$ 的某一鄰域中爲收斂。

假設 R 是方程(35)中兩級數的收斂圓半徑。若 R_1 爲一小於 R 的正數,則對這兩級數的係數 a_k 和 b_k 有如下的估計[14]:

$$|a_k|<\frac{m_1}{R_1^k};\quad |b_k|<\frac{m_2}{R_1^k},$$

其中 m_1 和 m_2 是常數。由是

$$|a_k|+|b_k|<\frac{m_1+m_2}{R_1^k},$$

因此取 M 甚大,可得

$$|a_k|+|b_k|<\frac{M}{R_1^k}。 \tag{41}$$

又比率

$$\frac{|\rho|+n}{f_0(\rho+n)}=\frac{|\rho|+n}{(\rho+n)(\rho+n-1)+(\rho+n)a_0+b_0}$$

當正整數 n 無限增加時其極限爲零,因爲分子是 n 的一次多項式,而分母是 n 的二次多項式。由是可固定一正整數 N 使當 $n\geqslant N$ 時

$$|f_0(\rho+n)|>|\rho|+n。 \tag{42}$$

由(37)式有

$$c_n=-\frac{f_1(\rho+n-1)}{f_0(\rho+n)}c_{n-1}-\frac{f_2(\rho+n-2)}{f_0(\rho+n)}c_{n-2}-\cdots-\frac{f_n(\rho)}{f_0(\rho+n)}c_0,$$

從而

$$|c_n|\leqslant\frac{|f_1(\rho+n-1)|}{|f_0(\rho+n)|}|c_{n-1}|+\frac{|f_2(\rho+n-2)|}{|f_0(\rho+n)|}|c_{n-2}|+\cdots+\frac{|f_n(\rho)|}{|f_0(\rho+n)|}|c_0|。 \tag{43}$$

其次，我們有：

$$f_k(\rho+n-k)=b_k+(\rho+n-k)a_k$$
$$|f_k(\rho+n-k)|<|b_k|+(|\rho|+n)|a_k| \quad (k=1,2,\cdots,n),$$

因此更有：

$$|f_k(\rho+n-k)|<(|\rho|+n)(|a_k|+|b_k|)。 \tag{44}$$

我們常可取足夠大的正數 P，使得前面 N 個係數滿足不等式：

$$|c_k|\leqslant\frac{P^k}{R_1^k} \qquad (k=0,1,\cdots,N-1)。 \tag{45}$$

回憶我們以前曾設 $c_0=1$。此外，我們又可設在任何情形下皆取 P 使滿足

$$P>1+M。 \tag{46}$$

對於其他係數，從 c_N 開始，我們可以應用不等式 (42)。利用這些不等式我們下面要證明：如果(45)式的估計對於所有的 c_k 從 c_0 到 c_{n-1} 為止都成立的話，那末他對 c_n 也一樣成立。實際上，由(42)，(43)和(44)有：

$$|c_n|<(|a_1|+|b_1|)|c_{n-1}|+(|a_2|+|b_2|)|c_{n-2}|+\cdots+$$
$$+(|a_n|+|b_n|)|c_0|,$$

再用(41)式得：

$$|c_n|<\frac{M}{R_1}|c_{n-1}|+\frac{M}{R_1^2}|c_{n-2}|+\cdots+\frac{M}{R_1^n}|c_0|,$$

由假設，(45)式的估計對於 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ 都成立，故得：

$$|c_n|<\frac{M}{R_1^n}(P^{n-1}+P^{n-2}+\cdots+1)=\frac{M(P^n-1)}{P-1}\frac{1}{R_1^n}。 \tag{47}$$

現在證明

$$\frac{M(P^n-1)}{P-1}<P^n。 \tag{48}$$

實際上，這不等式相當於：

$$P^{n+1}-(1+M)P^n+M>0$$

或 $$P^n[P-(1+M)]+M>0。$$

最後一式由(46)式立刻可得。由(47)和(48)兩不等式可得

$$|c_n|\leqslant\frac{P^n}{R_1^n},$$

就是我們所要證明的。

總括起來說，我們的結果是這樣：首先取 P 很大，使得(45)式對所有的 k 從 0 到 $N-1$ 為止都成立。對於其他的指數不等式(42)成立，應用這不等式我們證明了：如果(45)的估值到某一足數成立時，則他對於後一足數也成立。這樣我們就證明了(45)式對於所有的足數皆成立，即對任何的 n 成立：

$$|c_n|\leqslant\frac{P^n}{R_1^n}。$$

但是級數 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P^n}{R_1^n}z^n$$

在圓 $|z|<\frac{R_1}{P}$ 中確為絕對收斂。因(36)式中級數的一般項的模不大於上面這級數的一般項的模，故亦必在此圓中絕對收斂，當然亦可逐項微分，像所有的收斂冪級數一樣。這樣我們就證明了(36)式確是方程(34)的解，在 $z=0$ 的某一鄰域之中。現在證明在方程(35)的係數級數的收斂圓 $|z|<R$ 中每一點級數(36)皆為收斂。實際上，如果不然，則由級數(36)在 $z=0$ 的鄰域中所定義的函數經過解析延拓以後在圓 $|z|<R$ 內部必有一奇異點[18]（不是 $z=0$），但這是不可能的，因為方程(35)的係數是圓 $|z|<R$ 內的正則函數，除了在 $z=0$ 點以外，由[97]的結果，他的解經過解析延拓後不可能在其中有奇異點。

如果二次方程(39)的兩根之差不是整數，則每一根皆滿足條件(40)，故可如前做出兩個形式如(36)的解來，這兩個解顯然互為線性獨立($\rho_1\neq\rho_2$)。

現在再來研究當二次方程(39)有重根或是兩根之差為一整數的情形。

在第一種情形應用方程(39)的唯一的根我們可以如前做出一個形式如(36)的解，但還須找出第二個解。在第二種情形假設 ρ_1 和 ρ_2 是方程(39)的兩根，$\rho_1=\rho_2+m$，m 是正整數，就是說，ρ_1 的實數部分比 ρ_2 的實數部分要大。ρ_1 顯然滿足條件(40)，故用這根可以如前做出一個解來。如果我們企圖利用 ρ_2 來求方程的解，則將遭遇如下的困難。因爲 ρ_2+m 是方程(39)的根，故若取方程組(37)的第 $m+1$ 個方程：

$$c_m f_0(\rho_2+m)+c_{m-1}f_1(\rho_2+m-1)+\cdots+c_0 f_m(\rho_2)=0,$$

則在此方程中未知數 c_m 的係數 $f_0(\rho_2+m)$ 等於零。但是一般而論，其餘各項的和並不等於零，因此就得到矛盾。所以在這情形我們仍須用別的方法去求第二個解。注意：若在上述方程中其餘各項之和確係等於零，則我們可取 c_m 爲任意數，並可繼續計算其餘的係數 $c_{m+1},\cdots$。以前的估計告訴我們這樣得到的級數仍爲收斂。故在此特別情形下可如此求得第二個形式如(36)的解。

現在看在一般情形下第二個解應如何求法，假設一般

$$\rho_1=\rho_2+m, \tag{49}$$

其中 m 是正整數或零。回憶對於線性方程

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0$$

我們曾經有過一個公式，他可以從方程的一個解 w_1 得到方程的第二個解 w_2 [II, 24]：

$$w_2=Cw_1\int e^{-\int p(z)dz}\frac{dz}{w_1^2}, \tag{50}$$

其中 C 是任意常數。現在

$$p(z)=\frac{a_0}{z}+a_1+a_2z+\cdots$$

又

$$\int p(z)dz=\lg z^{a_0}+C_1+a_1z+\frac{1}{2}a_2z^2+\cdots$$

由此

$$e^{-\int p(z)dz}=z^{-a_0}P_1(z),$$

如前，上式中 $P_1(z)$ 是一個依 z 的冪次展開的泰勒級數，其常數項不等

於零。我們已知的解 w_1 具有形式：

(51) $$w_1 = z^{\rho_1} P_2(z),$$

由此 $$w_1^2 = z^{2\rho_1} P_3(z),$$

其中 $P_s(z)$ 皆爲常數項不等於零的泰勒級數。因此(50)式中的被積分函數是：

$$e^{-\int p(z)dz} \frac{1}{w_1^2} = z^{-a_0-2\rho_1} P_4(z)。$$

ρ_1 和 ρ_2 是二次方程(39)的兩根，因此：

$$\rho_1 + \rho_2 = 1 - a_0,$$

故由(49)得：

$$-a_0 - 2\rho_1 = \rho_2 - \rho_1 - 1 = -(1+m),$$

即(50)式中的被積分函數可展開爲：

$$e^{-\int p(z)dz} \frac{1}{w_1^2} = z^{-(1+m)} P_4(z) = \frac{\gamma_{-(1+m)}}{z^{1+m}} + \cdots +$$

$$+ \frac{\gamma_{-1}}{z} + \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots \qquad (\gamma_{-(1+m)} \neq 0)。$$

把這展開式積分，我們得到一項 $\gamma_{-1} \lg z$，另外還有一個冪級數從含 z^{-m} 的項開始。再以(51)式所定義的 w_1 乘之，即得 w_2 的表示式：

$$w_2 = z^{-m} P_5(z) \cdot z^{\rho_1} P_2(z) + \gamma_{-1} w_1 \lg z,$$

或由(49)式有：

(52) $$w_2 = z^{\rho_2} P_6(z) + \gamma_{-1} w_1 \lg z,$$

其中 $P_6(z)$ 是常數項不等於零的泰勒級數。(52)式在形式上是和(30)的第二式一致的，但(52)式中的羅朗級數沒有含負冪的項。注意：一般，常數 $\gamma_{-1} \neq 0$，但有時亦可等於零，這就是我們前面已經說過的特別情形。這樣，我們又得到了第二個解。我們已經證明了下面的定理：

定理 II. $z = z_0$ 是正則奇異點的充分條件是：方程式(1)的係數 $p(z)$ 以 z_0 爲不高於一階的極點，$q(z)$ 以 z_0 爲不高於二階的極點。

這條件的必要性已在前面說過了。

注意：有時可能兩個解都不以正則奇異點爲奇異點，這是當 ρ_1 和 ρ_2 都是非負的整數，並且第二個解不含對數的時候。例如方程

$$w''-\frac{2}{z}w'+\frac{2}{z^2}w=0$$

有如下兩個互爲線性獨立的解：

$$w_1=z;\quad w_2=z^2。$$

注意：若 $\rho_1=\rho_2$，則 $m=0$，由前面的演算立刻可知(52)式中的常數 γ_{-1} 必不等於零。

99. 富克斯型的微分方程 十九世紀中葉德國數學家富克斯首先對於正則奇異點作有系統的研究。我們現在要從事研究的是通常所謂富克斯型的微分方程，就是所有的奇異點都是正則奇異點的微分方程。設微分方程爲：

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0。\tag{53}$$

作自變數的變換：
$$z=\frac{1}{t},$$

我們得到下面的方程：

$$t^4\frac{d^2w}{dt^2}+\left[2t^3-t^2p\left(\frac{1}{t}\right)\right]\frac{dw}{dt}+q\left(\frac{1}{t}\right)w=0。\tag{53$_1$}$$

由假設 $t=0$ 應該是這方程的正則奇異點。故上式被除於 t^4 以後 $\frac{dw}{dt}$ 的係數不能以 $t=0$ 爲高於一階的極點，因此 $p\left(\frac{1}{t}\right)$ 的展開式應具如下的形式：

$$p\left(\frac{1}{t}\right)=d_1t+d_2t^2+\cdots,$$

卽 $p(z)$ 在 $z=\infty$ 的鄰近應有形式如下的展開式：

$$p(z)=d_1\frac{1}{z}+d_2\frac{1}{z^2}+\cdots\tag{54}$$

同樣 $\frac{1}{t^4}q\left(\frac{1}{t}\right)$ 不能以 $t=0$ 爲高於二階的極點，故得：

$$q\left(\frac{1}{t}\right)=d_2't^2+d_3't^3+\cdots,$$

從而 $q(z)$ 在 $z=\infty$ 的鄰近應有形式如下的展開式：

$$q(z)=d_2'\frac{1}{z^2}+d_3'\frac{1}{z^3}+\cdots, \tag{55}$$

就是說，無限遠點 $z=\infty$ 是方程(53)的正則奇異點的充要條件是：$p(z)$ 以 $z=\infty$ 爲零點，$q(z)$ 以 $z=\infty$ 爲不低於二階的零點。注意：若在展開式(54)中 $d_1=2$，在展開式(55)中 $d_2'=d_3'=0$，則 $t=0$ 不是方程(53_1)的奇異點。這時在 $z=\infty$ 的鄰域中方程有一解：

$$w=c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots+\frac{c_n}{z^n}+\cdots,$$

其中係數 c_0 和 c_1 是任意的。

假設 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是方程的有限遠奇異點。函數 $p(z)$ 可能以這些點爲一階極點，又由(54)，$p(z)$ 在無限遠點之值爲零，故必爲有理分式：

$$p(z)=\frac{p_1(z)}{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)},$$

其中分子至少比分母低一次。同樣由(55)式知 $q(z)$ 應具形式：

$$q(z)=\frac{q_1(z)}{(z-\alpha_1)^2\cdots(z-\alpha_n)^2},$$

其中分子至少比分母低兩次。將有理分式分解爲最簡分式即得富克斯型微分方程的係數的一般表示式：

$$\begin{aligned} p(z)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z-\alpha_k},\\ q(z)&=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{B_k}{(z-\alpha_k)^2}+\frac{C_k}{z-\alpha_k}\right]。\end{aligned} \tag{56}$$

由(55)式我們應有：

$$zq(z)\to 0 \text{ 當 } z\to\infty,$$

從而(56)的第二式告訴我們諸常數 C_k 應滿足條件：

$$C_1+C_2+\cdots+C_n=0。 \tag{57}$$

易知(56)和(57)是方程(53)屬於富克斯型的充要條件。

現在要求在奇異點 $z=\alpha_k$ 和 $z=\infty$ 的判定方程。因 $p(z)$ 的表示式

中 $(z-\alpha_k)^{-1}$ 的係數爲 A_k，$q(z)$ 的表示式中 $(z-\alpha_k)^{-2}$ 的係數爲 B_k，故在 α_k 這點的判定方程爲：

$$\rho(\rho-1)+A_k\rho+B_k=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n)。\tag{58}$$

現在再看無限遠點 $z=\infty$。對於方程 (53_1) 而言，即看 $t=0$ 這點。在

$$\frac{1}{t^4}\left[2t^3-t^2p\left(\frac{1}{t}\right)\right]$$

中 t^{-1} 的係數顯然藉

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\left[2t^3-t^2p\left(\frac{1}{t}\right)\right]$$

或

$$\lim_{z\to\infty}z^3\left[\frac{2}{z^3}-\frac{1}{z^2}p(z)\right]=2-\lim_{z\to\infty}zp(z)$$

決定。由(56)的第一個方程知此係數是：

$$2-\sum_{k=1}^{n}A_k。$$

同樣，在

$$\frac{1}{t^4}q\left(\frac{1}{t}\right)$$

中 t^{-2} 的係數是

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}q\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{z\to\infty}z^2q(z)。$$

但是由(56)和(57)：

$$q(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{(z-\alpha_k)^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z}\frac{C_k}{1-\frac{\alpha_k}{z}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{(z-\alpha_k)^2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_kC_k}{z^2}+\frac{\alpha_k^2C_k}{z^3}+\cdots\right),$$

從而

$$\lim_{z\to\infty}z^2q(z)=\sum_{k=1}^{n}(B_k+\alpha_kC_k)。$$

最後即得在 $z=\infty$ 的判定方程：

$$\rho(\rho-1)+\rho\left(2-\sum_{k=1}^{n}A_k\right)+\sum_{k=1}^{n}(B_k+\alpha_kC_k)=0。\tag{59}$$

由(58)和(59)易知在所有奇異點的判定方程的根的總和等於

$$n-\sum_{k=1}^{n}A_k+\sum_{k=1}^{n}A_k-1=n-1,$$

即有限遠奇異點的個數減一。

如果我們要做一個富克斯型的方程，他祇有一個奇異點的，那末我們常常可以假設這奇異點就是無限遠點，因此在有限距離內就沒有奇異點了。這時在(56)式中顯然所有的係數 A_k, B_k, C_k 都要等於零，就是說，$p(z)$和 $q(z)$ 應該恆等於零，因此就得到一個沒有什麼意思的方程 $w''=0$。

再看具有兩個奇異點的富克斯型微分方程，其中一個奇異點常可假設是無限遠點。這時(56)式中的和實際上就祇包含一項，由(57)的條件，可知方程是：

$$w''+\frac{A}{z-a}w'+\frac{B}{(z-a)^2}w=0,$$

其中 a 是唯一的有限遠奇異點。

上面的方程就是尤拉氏線性方程[II, 42]，如我們所知，經過一個簡單的替換

$$\tau=\lg(z-a)$$

以後即成爲具常係數的微分方程了。

在下一節中我們要詳細研究具有三個奇異點的富克斯型微分方程。

回憶我們從前研究過的貝塞爾方程[II, 48]：

$$z^2w''+zw'+(z^2-p^2)w=0,$$

這方程以 $z=0$ 爲正則奇異點。但 w 的係數在無限遠點鄰域中不滿足條件(55)，故 $z=\infty$ 爲貝塞爾方程的非正則奇異點，就是說，貝塞爾方程式有兩個奇異點：正則奇異點 $z=0$ 和非正則奇異點 $z=\infty$。

100. 高斯方程　現在我們來考察具有三個奇異點的富克斯型微分方程。應用自變數的平面上的分式線性變換以後，我們可以，不失一般性，假定這些奇異點是

$$z=0;\quad z=1 \text{ 和 } z=\infty。$$

又設在這些點的判定方程的根是：

$$\alpha_1,\alpha_2;\quad \beta_1,\beta_2;\quad \gamma_1,\gamma_2。$$

則這方程的係數的表示式如下：

$$p(z)=\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z-1}$$

$$q(z)=\frac{B_1}{z^2}+\frac{B_2}{(z-1)^2}+\frac{C_1}{z}+\frac{C_2}{z-1},$$

其中

(60) $$C_1+C_2=0。$$

由條件，方程

$$\rho(\rho-1)+A_1\rho+B_1=0$$

應以 α_1 和 α_2 爲根，故必

$$A_1=1-(\alpha_1+\alpha_2),\ B_1=\alpha_1\alpha_2。$$

同樣，從 $z=1$ 這點的判定方程可得：

$$A_2=1-(\beta_1+\beta_2);\quad B_2=\beta_1\beta_2。$$

在 $z=\infty$ 的判定方程是：

$$\rho(\rho-1)+(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2)\rho+\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+C_2=0。$$

以其一根 $\rho=\gamma_1$ 代入，可得 C_2 的表示式：

$$C_2=-\gamma_1(\gamma_1-1)-(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2)\gamma_1-(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2),$$

再由(60)式的條件有 $C_1=-C_2$。這樣，我們看到，在三個奇異點的場合，方程的係數可由在奇異點的判定方程的根完全決定。由以上的計算立刻可知，對於 $z=0$ 和 $z=1$ 兩點，判定方程的根可以隨意定之，而對 $z=\infty$ 這點，判定方程的根祇有一個可以任意。另外一根則由下面的條件完全決定：判定方程的六個根的總和應等於一(有限遠奇異點的個數減一)。

這樣做成的方程的任一解有時人們用下面的記號表示：

$$(61)\qquad P\begin{pmatrix}0, & 1, & \infty & \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1; & z\\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 & \end{pmatrix}$$

這記號係黎曼所創。

現在引進函數 w 的一個初等變換，藉以簡化方程的形式。注意：若依下式以另一未知函數 u 代替 w：

$$w=z^p(z-1)^q u;\quad u=z^{-p}(z-1)^{-q}w,$$

則對 u 同樣可得具有三個奇異點 $z=0$, $z=1$ 和 $z=\infty$ 的方程，但是由於乘數 $z^{-p}(z-1)^{-q}$ 的存在，對於函數 u 而言，在 $z=0$ 的判定方程的兩根不是 α_1 和 α_2 而是 α_1-p 和 α_2-p 了。同樣，在 $z=1$ 的判定方程的兩根變爲 β_1-q 和 β_2-q。取 $p=\alpha_1$, $q=\beta_1$，可使在 $z=0$ 和 $z=1$ 的判定方程都有一根爲零，這是我們以後要假定的。

現在再引進新的記號。假設在 $z=\infty$ 的判定方程的兩根是 α 和 β。在 $z=0$ 判定方程的一根等於零，另一根記作 $1-\gamma$。最後，在 $z=1$ 判定方程的一根等於零，第二根必爲 $\gamma-\alpha-\beta$，因爲六個根的和等於 1 的緣故。這樣，代替一般的情形(61)，我們祇要考察下面的特別情形：

$$(61_1)\qquad P\begin{pmatrix}0, & 1, & \infty & \\ 0, & 0, & \alpha; & z\\ 1-\gamma, & \gamma-\alpha-\beta, & \beta & \end{pmatrix}$$

在本節前半部的計算中若置：

$$\alpha_1=0;\quad \alpha_2=1-\gamma;\quad \beta_1=0;\quad \beta_2=\gamma-\alpha-\beta;\quad \gamma_1=\alpha;\quad \gamma_2=\beta$$

卽可決定我們的方程的係數。於是得到下面形式的方程：

$$(62)\qquad w''+\frac{-\gamma+(1+\alpha+\beta)z}{z(z-1)}w'+\frac{\alpha\beta}{z(z-1)}w=0\text{。}$$

這方程稱爲超幾何微分方程或高斯方程。在下節中我們要來求他的解在奇異點鄰近的展開式。

101．超越幾何級數 先求方程(62)在奇異點 $z=0$ 的鄰域中的解。這些解應具下之形式：

(63) $$P_1(z);\quad z^{1-\gamma}P_2(z),$$

其中 $P_1(z)$ 和 $P_2(z)$ 都是有常數項的麥克勞林級數。先求第一種解。爲此，將(62)式改寫爲：

$$z(z-1)w''+[-\gamma+(1+\alpha+\beta)z]w'+\alpha\beta w=0,$$

以 $$w_1=1+c_1z+c_2z^2+\cdots$$

代入等式的左邊。應用通常的未定係數法可得如下的解：

(64) $$w_1=F(\alpha,\beta,\gamma;z)=1+\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}z^2+$$

$$+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n+\cdots,$$

其中 $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ 即表示等式右邊的無窮級數。因爲方程的奇異點和原點最近的是 $z=1$，我們可以知道上面這級數在圓 $|z|<1$ 中必爲收斂。這就是通常所謂超越幾何級數。當 $\alpha=\beta=\gamma=1$ 時，他還原爲幾何級數。我們在[I, 141]中早已研究過這個級數。

要決定(63)中的第二個解，我們可以利用上節講過的函數 w 的初等變換。現在藉下式引進另一未知函數 u 以代替 w：

(65) $$w=z^{1-\gamma}u;\quad u=z^{\gamma-1}w=\frac{1}{z^{1-\gamma}}w。$$

對於函數 u，在 $z=0$ 的判定方程的根由 0 和 $(1-\gamma)$ 變爲 $(\gamma-1)$ 和 0。在 $z=1$ 判定方程的根仍爲 0 和 $(\gamma-\alpha-\beta)$，最後，由(65)的第二式知在 $z=\infty$ 判定方程的根由 α 和 β 變爲 $(\alpha+1-\gamma)$ 和 $(\beta+1-\gamma)$。

實際上，在變換以前，解在 $z=\infty$ 鄰近的展開式是具如下形式的：

$$w_1=\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}P_1\left(\frac{1}{z}\right)\text{ 和 }w_2=\left(\frac{1}{z}\right)^{\beta}P_2\left(\frac{1}{z}\right)$$

經過變換以後他們變爲：

$$u_1=\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha+1-\gamma}P_1\left(\frac{1}{z}\right)\text{ 和 }u_2=\left(\frac{1}{z}\right)^{\beta+1-\gamma}P_2\left(\frac{1}{z}\right)。$$

因此知道新的未知函數 u 可由下面的記號決定：

$$P\begin{pmatrix} 0, & 1, & \infty & \\ 0, & 0, & \alpha+1-\gamma; & z \\ \gamma-1, & \gamma-\alpha-\beta, & \beta+1-\gamma & \end{pmatrix}。$$

現在改寫(61_1)中的α，β和γ爲α_1，β_1和γ_1，易知要將上面這個黎曼記號改寫成(61_1)的形式，必須有：

$$1-\gamma_1=\gamma-1;\quad \alpha_1=\alpha+1-\gamma;\quad \beta_1=\beta+1-\gamma,$$

卽

$$\alpha_1=\alpha+1-\gamma;\quad \beta_1=\beta+1-\gamma;\quad \gamma_1=2-\gamma。$$

由前可知，在原點$z=0$爲正則的新方程的解應該是：

$$u=F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; z)=F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; z)$$

由此再用(65)式，卽得：

$$w_2=z^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; z)$$

這就是(63)中的第二個解。

現在再來求方程(62)的在奇異點$z=1$鄰域中的解。先藉下式引進另一自變數

$$z'=1-z。$$

在這變換下$z=0$變成$z'=1$，$z=1$變成$z'=0$，$z=\infty$變成$z'=\infty$。這樣，在新的自變數下我們仍舊得到一個高斯方程，而函數w則由下面的記號決定：

$$P\begin{pmatrix} 0, & 1, & \infty & \\ 0, & 0, & \alpha; & z' \\ \gamma-\alpha-\beta, & 1-\gamma, & \beta & \end{pmatrix},$$

由是參數(α, β, γ)的值爲：

$$\alpha_1=\alpha;\quad \beta_1=\beta,\quad \gamma_1=1+\alpha+\beta-\gamma。$$

故在$z'=0$的鄰域中有兩個解：

$$F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma; z')$$

$$z'^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta; z')$$

回到原來的自變數，卽得在$z=1$鄰域中的兩個解：

$$(64_2)\qquad \begin{cases} w_3=F(\alpha,\beta,1+\alpha+\beta-\gamma;1-z); \\ w_4=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha,1+\gamma-\alpha-\beta;1-z)。\end{cases}$$

要求在 $z=\infty$ 鄰域中的解可以作自變數的變換：

$$z'=\frac{1}{z};\quad z=\frac{1}{z'},$$

這變換使 $z=1$ 這點不變，而將 $z=0$ 和 $z=\infty$ 互相交換。在新的自變數下函數 w 由下面的記號決定：

$$P\begin{pmatrix} 0, & 1, & \infty & \\ \alpha, & 0, & 0; & z' \\ \beta, & \gamma-\alpha-\beta, & 1-\gamma & \end{pmatrix}。$$

再作一個函數的變換：

$$(65_1)\qquad w=z'^{\alpha}u;\quad u=\frac{1}{z'^{\alpha}}w,$$

我們得到在對應的高斯方程中函數 u 的記號：

$$P\begin{pmatrix} 0, & 1, & \infty & \\ 0, & 0, & \alpha; & z' \\ \beta-\alpha, & \gamma-\alpha-\beta, & 1+\alpha-\gamma & \end{pmatrix}。$$

這高斯方程的參數的值是：

$$\alpha_1=\alpha;\quad \beta_1=1+\alpha-\gamma;\quad \gamma_1=1+\alpha-\beta,$$

因此我們得到函數 u 在 $z'=0$ 的鄰域中的兩個解：

$$u_1=F(\alpha,1+\alpha-\gamma,1+\alpha-\beta;z');$$
$$u_2=z'^{\beta-\alpha}F(\beta,1+\beta-\gamma,1+\beta-\alpha;z'),$$

再由 (65_1) 及 $z'=\frac{1}{z}$ 兩關係回到原來的自變數 z 和函數 w，卽得方程 (62) 在 $z=\infty$ 鄰域中的兩個解：

$$(64_3)\qquad \begin{cases} w_5=\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}F\left(\alpha,1+\alpha-\gamma,1+\alpha-\beta;\frac{1}{z}\right) \\ w_6=\left(\frac{1}{z}\right)^{\beta}F\left(\beta,1+\beta-\gamma,1+\beta-\alpha;\frac{1}{z}\right)。\end{cases}$$

這樣我們看到在各奇異點鄰域中所定義的六個解都可以用超越幾

何級數來表示。注意：在以上的計算中我們都假設判定方程的兩根之差不是整數。由奇異點的位置可知公式(64_2)當 $|z-1|<1$ 時成立，公式(64_3)當 $|z|>1$ 時成立。注意：解(64)當 γ 爲正整數時仍有意義。

在 [I, 141] 中我們研究過當 $x=1$ 時超越幾何級數的收斂性，並且證明若 α, β, γ 爲實數，且滿足條件：

$$\gamma-\alpha-\beta>0 \tag{66}$$

則級數爲收斂。這時由亞貝爾第二定理[I, 149]知 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)\to F(\alpha, \beta, \gamma; 1)$當 $x\to 1-0$ 時，又

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1)=1+\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}+\cdots$$

下面我們要證明公式

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}。\tag{67}$$

比較 x^n 的係數易證下面的關係：

$$\gamma[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x]F(\alpha, \beta, \gamma; x)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF(\alpha, \beta, \gamma+1; x)=$$
$$=\gamma(\gamma-1)(1-x)F(\alpha, \beta, \gamma-1; x) \qquad (|x|<1)$$

或

$$\gamma[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x]F(\alpha, \beta, \gamma; x)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF(\alpha, \beta, \gamma+1; x)=$$
$$=\gamma(\gamma-1)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(v_n-v_{n-1})x^n\right], \tag{68}$$

其中 v_n 是 $F(\alpha, \beta, \gamma-1; x)$ 的展開式中 x^n 的係數。現在證明在條件(66)之下 $v_n\to 0$ 當 $n\to\infty$。

我們有[I, 141]：

$$\frac{|v_n|}{|v_{n+1}|}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta}{n}+\frac{\omega_n}{n^2},$$

其中 ω_n 的絕對值爲有界，當 $n\to\infty$。假設 p 是一個正整數，滿足 $p(\gamma-\alpha-\beta)>1$。我們可以寫：

$$\frac{|v_n|^p}{|v_{n+1}|^p}=1+\frac{p(\gamma-\alpha-\beta)}{n}+\frac{\omega_n'}{n^2},$$

其中 ω_n' 的絕對值爲有界。由上面的等式和不等式 $p(\gamma-\alpha-\beta)>1$ 可知以 $|v_n|^p$ 爲一般項的級數必收斂 [I, 141]，因此 $v_n\to 0$ 當 $n\to\infty$。將(68)式中的 x 趨向極限 1 並應用亞貝爾第二定理，卽得：

$$\gamma(\alpha+\beta-\gamma)F(\alpha, \beta, \gamma; 1)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)F(\alpha, \beta, \gamma+1; 1)=0,$$

卽

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1)=\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}F(\alpha, \beta, \gamma+1; 1)$$

把這關係應用多次，可得：

(69) $$F(\alpha, \beta, \gamma; 1)=\left[\prod_{k=1}^{m-1}\frac{(\gamma-\alpha+k)(\gamma-\beta+k)}{(\gamma+k)(\gamma-\alpha-\beta+k)}\right]F(\alpha, \beta, \gamma+m; 1).$$

上式右邊方括弧中的乘積當 $m\to\infty$ 時有極限[73]：

$$\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}。$$

現在再證明當 $m\to\infty$ 時 $F(\alpha, \beta, \gamma+m; 1)\to 1$。以 $u_n(\alpha, \beta, \gamma)$ 記展開式 $F(\alpha, \beta, \gamma; 1)$ 中 x^n 的係數，則知：

$$|F(\alpha, \beta, \gamma+m; 1)-1|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(\alpha, \beta, \gamma+m)|$$

在 $u_n(\alpha, \beta, \gamma+m)$ 的分子中以 $|\alpha|$ 及 $|\beta|$ 代 α 和 β，在分母中以 $m-|\gamma|$ 代 $\gamma+m$，但設 $m>|\gamma|$，我們得到：

$$|F(\alpha, \beta, \gamma+m; 1)-1|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}u_n(|\alpha|, |\beta|, m-|\gamma|),$$

其中不等式右邊爲正項級數。從括弧中拿出因子$\frac{|\alpha|\cdot|\beta|}{m-|\gamma|}$，並在分母中以 $(n-1)!$ 代替 $n!$，得：

$$|F(\alpha, \beta, \gamma+m; 1)-1|<\frac{|\alpha|\cdot|\beta|}{m-|\gamma|}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}u_n(|\alpha|+1, |\beta|+1, m-|\gamma|+1)。$$

對於相當大的 m，參數 $\alpha_1=|\alpha|+1$，$\beta_1=|\beta|+1$，$\gamma_1=m-|\gamma|+1$ 滿足條件 (66)，因此上之不等式右邊的級數收斂，當 m 增加時這級數的和及一般項均減少。又級數前面的因子 $\frac{|\alpha|\cdot|\beta|}{m-|\gamma|}\to 0$ 當 $m\to\infty$，故知當 $m\to\infty$ 時 $F(\alpha, \beta, \gamma+m; 1)\to 1$。最後，由公式(69)將 $m\to\infty$ 即得(67)式。

利用公式 (67)，可以將 w_1 用線性獨立的解 w_3 和 w_4 來表示。這三個解在以 $z=0$ 和 $z=1$ 爲圓心，半徑等於 1 的兩圓的公共部分中同時存在。我們應有：

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x)=C_1F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma; 1-x)+$$
$$+C_2(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1+\gamma-\alpha-\beta; 1-x)。$$

假設 α, β, 和 γ 滿足不等式 $1>\gamma>\alpha+\beta$，我們可以在上面的等式中設 $x=1$ 和 $x=0$ 來決定 C_1 和 C_2 的數值。利用公式(67)，[71]中的等式(122)和下面的簡單公式：

$$\sin\pi\alpha\sin\pi\beta=\sin\pi(\gamma-\alpha)\sin\pi(\gamma-\beta)-\sin\pi\gamma\sin\pi(\gamma-\alpha-\beta)$$

我們得到下面的等式：

(70) $$\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)F(\alpha, \beta, \gamma; x)=$$
$$=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma; 1-x)+$$
$$+\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1+\gamma-\alpha-\beta; 1-x)。$$

上式係在 $1>\gamma>\alpha+\beta$ 的條件下證明的。可以證明：祇要 $\gamma-\alpha-\beta$ 不是整數，上面的等式恆成立。

102. 勒上特多項式 現在要研究超越幾何級數的一個重要的特別情形。首先，對二階線性方程作一個一般的變換。設有二階方程：

(71) $$a(z)w''+b(z)w'+c(z)w=0。$$

我們要找一個乘數 $f(z)$，使得(71)式左邊前兩項和 $f(z)$ 相乘後成爲某一乘積的導數，就是說，要使

$$a(z)f(z)w''+b(z)f(z)w'=\frac{d}{dz}[a(z)f(z)w']。$$

那末我們就應該有：

$$b(z)f(z)=\frac{d}{dz}[a(z)f(z)],$$

從而 $$a(z)f'(z)+[a'(z)-b(z)]f(z)=0$$

或 $$\frac{f'(z)}{f(z)}+\frac{a'(z)}{a(z)}-\frac{b(z)}{a(z)}=0,$$

所以我們可以取

(72) $$f(z)=\frac{1}{a(z)}e^{\int\frac{b(z)}{a(z)}dz},$$

經過這步驟以後我們有：

(73) $$p_1(z)=a(z)f(z)=e^{\int\frac{b(z)}{a(z)}dz};\quad q_1(z)=c(z)f(z)=\frac{c(z)}{a(z)}e^{\int\frac{b(z)}{a(z)}dz},$$

而方程(71)變爲：

(74) $$\frac{d}{dz}[p_1(z)w']+q_1(z)w=0。$$

例如，對於高斯方程(62)施行這方法，可以得到：

(75) $$\frac{d}{dz}[z^{\gamma}(z-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma}w']+\alpha\beta z^{\gamma-1}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma}w=0。$$

現在再導出關於超越幾何級數的一個一般的公式。微分級數(64) n 次，得：

$$w_1^{(n)}=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\times$$
$$\times\left[1+\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{1!(\gamma+n)}z+\cdots\right]$$

或

(76) $$w_1^{(n)}=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\times$$
$$\times F(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+n;\ z),$$

就是說，以 α,β,γ 爲參數的超越幾何級數(64)微分 n 次後等於以 $\alpha+n$, $\beta+n,\gamma+n$ 爲參數的超越幾何級數乘一個常數。因此函數 $w_1^{(n)}$ 也滿足方程(75)，如果把其中的 α,β 和 γ 改爲 $\alpha+n$, $\beta+n$ 和 $\gamma+n$ 的話，卽

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\gamma+n}(z-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma+n}\frac{dw_1^{(n)}}{dz}\right]=$$
$$=-(\alpha+n)(\beta+n)z^{\gamma-1+n}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n}w_1^{(n)}。$$

把這恆等式微分 n 次，得到另一恆等式：

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left[z^{\gamma+n}(z-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma+n}\frac{dw_1^{(n)}}{dz}\right]=$$
$$=-(\alpha+n)(\beta+n)\frac{d^n}{dz^n}[z^{\gamma-1+n}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n}w_1^{(n)}]。$$

以 $n=0,1,2,\cdots,k-1$ 代入，得到 k 個恆等式。將這 k 個恆等式邊邊相乘，消去相同的因子以後，卽得所要求的恆等式：

(77) $$\frac{d^k}{dz^k}[z^{\gamma+k-1}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+k}w_1^{(k)}]=$$
$$=(-1)^k\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots$$
$$\cdots(\beta+k-1)z^{\gamma-1}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma}w_1,\qquad (k=1,2,3,\cdots)。$$

記住在這恆等式中 w_1 代表超越幾何級數(64)。

注意：一般，若超越幾何級數中的 α 或 β 等於負整數的話，則級數退縮而成一多項式。現在我們就看這樣的一個特別情形，卽取超越幾何級數

(78) $$F(k+1,\ -k,\ 1;\ z) \qquad (\alpha=k+1,\ \beta=-k,\ \gamma=1),$$

其中 k 是個正整數或零。函數(78)實際上祇是一個 k 次的多項式，其最高次項 z^k 的係數是：

$$\frac{(k+1)(k+2)\cdots 2k(-k)(-k+1)\cdots(-1)}{k!\,1\cdot 2\cdots k}=(-1)^k\frac{2k!}{(k!)^2}。$$

在公式(77)中置 $w_1=F(k+1,\ -k,\ 1;\ z)$，即 $\alpha=k+1,\ \beta=-k$ 和 $\gamma=1$，我們得到 $w_1^{(k)}=(-1)^k\frac{2k!}{k!}$，約去等式兩邊相同的因子，可得：

(79) $$F(k+1,\ -k,\ 1;\ z)=\frac{(-1)^k}{k!}\frac{d^k}{dz^k}[z^k(z-1)^k]。$$

現在引進另一自變數 x，他和 z 的關係是：

(80) $$z=\frac{1-x}{2}。$$

這時 $z=0$ 和 $z=1$ 變爲 $x=1$ 和 $x=-1$。記

(81) $$P_k(x)=F\left(k+1,\ -k,\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right)。$$

將(80)式代入(79)式，卽得 $P_k(x)$ 的表示式：

(82) $$P_k(x)=\frac{1}{k!\,2^k}\frac{d^k}{dx^k}[(x^2-1)^k]。$$

這些多項式 $P_k(x)$ 通常稱爲勒上特多項式。以後我們在研究球函數的時候還要碰到他們。

現在說明他們的幾個基本性質。函數(79)滿足一個方程，他是由方程(75)經過

(83) $$\alpha=k+1;\quad \beta=-k,\quad \gamma=1$$

的替換而得到的，卽函數(79)滿足方程

$$\frac{d}{dz}[z(z-1)w']-k(k+1)w=0。$$

再在這方程中依照(80)式改自變數爲 x，我們看到勒上特多項式 $P_k(x)$ 是下列方程的解：

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_k(x)}{dx}\right]+k(k+1)P_k(x)=0。\tag{84}$$

寫一個更一般的方程：

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0,\tag{85}$$

其中 λ 是個參數。這方程在兩奇異點 $x=\pm1$ 的判定方程的兩根都等於零。這事由方程的形狀不難知道，或由條件(83)有

$$\gamma-1=0;\quad \gamma-\alpha-\beta=0,$$

因此也可知道在 $x=\pm1$ 的判定方程的兩根都等於零。

這樣，在 $x=\pm1$ 有一個是正則解，另外一個解則包含對數函數，例如，在 $x=1$，後一解具如下的形式：

$$P_1(x-1)+P_2(x-1)\lg(x-1),$$

其中 $P_1(x-1)$和 $P_2(x-1)$是有常數項的泰勒級數。由此事實立刻知道包含對數函數的解在對應的奇異點無論如何必趨於無限大。注意：我們在 [98] 中已經提到過，當判定方程的兩根相等時係數 γ_{-1} 必不等於零，故此時必然存在含有對數函數的解。

回到方程 (85)，取其在 $x=-1$ 爲正則的解 y_1。將這解沿着線段 $-1\leqslant x\leqslant +1$ 解析延拓到 $x=+1$ 時，一般，所得爲一含對數函數的解，他在這點的值爲無限大。但是對於參數 λ 的特別數值，方程式(85)亦可有在 $x=-1$ 和 $x=+1$ 同時爲正則的解，即在整個閉線段[-1　$+1$]上爲有限的解。這種特別的數值是

$$\lambda_k=k(k+1),\tag{86}$$

對 λ_k 方程(85)就有形式如 $P_k(x)$的解。可以證明：使得方程(85)在整個閉線段[-1, $+1$]上有有限解的 λ 的數值亦僅限於(86)而已。證明從略。

再講一點勒上特多項式的性質。寫出對於兩個不同的勒上特多項式的微分方程：

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_m(x)]+\lambda_m P_m(x)=0$$
$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_n(x)]+\lambda_n P_n(x)=0。\qquad (n\neq m)$$

以 $P_n(x)$ 乘第一式，$P_m(x)$ 乘第二式，相減，然後在區間$(-1, +1)$上積分，得：

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_{-1}^{+1}P_m(x)P_n(x)dx=\int_{-1}^{+1}\Big\{P_m(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_n(x)]-$$
$$-P_n(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_m(x)]\Big\}dx。$$

將等式右邊第一項行分部積分，得：

$$\int_{-1}^{+1}P_m(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_n(x)]dx=$$
$$=(1-x^2)P_m(x)P'_n(x)\Big|_{x=-1}^{x=+1}-\int_{-1}^{+1}(1-x^2)P'_m(x)P'_n(x)dx,$$

或

$$\int_{-1}^{+1}P_m(x)\frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)P'_n(x)\Big]dx=-\int_{-1}^{+1}(1-x^2)P'_m(x)P'_n(x)dx。$$

同樣可得

$$\int_{-1}^{+1}P_n(x)\frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)P'_m(x)\Big]dx=-\int_{-1}^{+1}(1-x^2)P'_m(x)P'_n(x)dx。$$

因此知道

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_{-1}^{+1}P_m(x)P_n(x)dx=0$$

或

$$\int_{-1}^{+1}P_m(x)P_n(x)dx=0, \qquad (m\neq n) \tag{87}$$

即勒上特多項式在區間$(-1, +1)$上有正交性質。如果我們再計算勒上特多項式的平方的積分：

$$I_n=\int_{-1}^{+1}P_n^2(x)dx, \tag{88}$$

則可知其值並不等於 1，故勒上特多項式雖爲正交，但並非標準函數

系。由(82)式,利用萊伯尼茲公式,可寫:

$$P_k(x)=\frac{1}{k!\,2^k}\left\{(x+1)^k\frac{d^k(x-1)^k}{dx^k}+\frac{k}{1}\cdot\frac{d(x+1)^k}{dx}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{d^{k-1}(x-1)^k}{dx^{k-1}}+\cdots\right\}。$$

顯然易知:

$$\frac{d^k(x-1)^k}{dx^k}=k! \quad 及 \quad \left.\frac{d^{k-s}(x-1)^k}{dx^{k-s}}\right|_{x=1}=0 \quad (s=1,2,\cdots k),$$

由此立刻可得下面的等式

$$P_k(1)=1。\tag{89}$$

現在我們來計算積分 I_n。利用(82)式,可寫:

$$I_n=\frac{1}{(n!)^2 2^{2n}}\int_{-1}^{+1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}dx。$$

行分部積分,得:

$$I_n=\frac{1}{(n!)^2 2^{2n}}\left[\left.\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\right|_{x=-1}^{x=+1}-\right.$$

$$\left.-\int_{-1}^{+1}\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\cdot\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}dx\right]。$$

多項式 $(x^2-1)^n$ 以 $x=\pm1$ 爲 n 重零點。將他微分 $(n-1)$ 次以後所得到的多項式仍以 $x=\pm1$ 爲零點(一重)。因此上式中積分出來的項數值爲零。繼續施行分部積分,每次所得積分出來的項都等於零。最後得到:

$$\int_{-1}^{+1}P_n^2(x)dx=\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}dx。$$

但是

$$\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}=\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^{2n}+\cdots)=1\cdot2\cdot\cdots2n=(2n)!$$

從而

$$\int_{-1}^{+1}P_n^2(x)dx=(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)\cdots2n}{n!\,2^{2n}}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n dx。$$

令 $x=\cos\varphi$，得：

$$\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n dx=(-1)^n\int_0^{\pi}\sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi=(-1)^n 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi,$$

由[I, 100]知：

$$\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n dx=(-1)^n 2\frac{2\cdot4\cdots2n}{3\cdot5\cdots(2n+1)},$$

代入前式即得：

$$\int_{-1}^{+1}P_n^2(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}。\tag{90}$$

利用(82)式並應用羅爾定理不難證明多項式 $P_n(x)$ 的 n 個零點互不相同，而且都在區間 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 的內部。實際上，多項式 $\frac{d(x^2-1)^n}{dx}$ 爲 $(2n-1)$ 次，他以 $x=\pm1$ 爲 $(n-1)$ 重零點，由羅爾定理知他還有一零點 $x=\alpha$ 在區間 $(-1, +1)$ 的內部。這些就是他的全部零點。其次，$(2n-2)$ 次多項式 $\frac{d^2(x^2-1)^n}{dx^2}$ 以 $x=\pm1$ 爲 $(n-2)$ 重零點，此外，由羅爾定理知還有兩個實零點，一個在區間 $(-1, \alpha)$ 內部，一個在 $(\alpha, +1)$ 內部。繼續做下去，可知 $P_n(x)$ 有 n 個不同的零點在區間 $(-1, +1)$ 的內部。

103. 夏可皮多項式 勒上特多項式不過是超越幾何級數退縮而成多項式的一個特殊情形。現在我們要研究一般的情形。引進下列記號：

$$\gamma-1=p;\quad \alpha+\beta-\gamma=q。\tag{91}$$

並假設 p 和 q 都是固定的，大於 (-1) 的數，又參數 α, β 和 γ 都是實數。要使超越幾何級數退縮成爲 k 次多項式，我們應取 α 或 β 等於 $(-k)$。不失普遍性，我們可設 $\beta=-k$，再由(91)式決定 α 和 γ 的數值。這樣得到的多項式記作：

$$Q_k^{(p,q)}(z)=C_k F(p+q+k+1, -k, p+1; z),\tag{92}$$

其中 C_k 是任意常數。

將這超越幾何級數依(64)式展開時得到一個多項式，其中 z^k 的係數等於

$$(-1)^k\frac{(p+q+k+1)(p+q+k+2)\cdots(p+q+2k)}{(p+1)(p+2)\cdots(p+k)}C_k。$$

再對多項式(92)應用(77)式，得：

$$k!(p+q+k+1)(p+q+k+2)\cdots(p+q+2k)z^p(z-1)^qQ_k^{(p,q)}(z)=$$
$$=(-1)^k\frac{(p+q+k+1)\cdots(p+q+2k)}{(p+1)(p+2)\cdots(p+k)}k!C_k\frac{d^k}{dz^k}[z^{p+k}(z-1)^{q+k}]。$$

定義常數 C_k 爲：

$$C_k=\frac{(p+1)(p+2)\cdots(p+k)}{k!}。$$

則對多項式 $Q_k^{(p,q)}(z)$ 成立下面的公式：

$$z^p(z-1)^qQ_k^{(p,q)}(z)=\frac{(-1)^k}{k!}\frac{d^k}{dz^k}[z^{p+k}(z-1)^{q+k}],$$

若藉(80)式以 x 代 z，則所得 x 的多項式 $P_k^{(p,q)}(x)$ 稱爲夏可皮多項式，他滿足方程

$$(93)\quad (1-x)^p(1+x)^qP_k^{(p,q)}(x)=\frac{(-1)^k}{k!2^k}\frac{d^k}{dx^k}[(1-x)^{p+k}(1+x)^{q+k}]。$$

當 $p=q=0$ 時這些多項式合於勒上特多項式，當 $k=0$ 時 $P_0^{(p,q)}(x)=1$。

由 C_k 的定義立刻知道在多項式(92)中 z^k 的係數等於：

$$(-1)^k\frac{(p+q+k+1)(p+q+k+2)\cdots(p+q+2k)}{k!},$$

而在多項式 $P_k^{(p,q)}(x)$ 中 x^k 的係數等於：

$$a_k=\frac{(p+q+k+1)(p+q+k+2)\cdots(p+q+2k)}{k!2^k}。$$

在我們現在的情形：

$$\alpha=p+q+k+1,\ \beta=-k,\ \gamma=p+1,$$

故函數(92)是方程

$$\frac{d}{dz}[z^{p+1}(z-1)^{q+1}w']-k(p+q+k+1)z^p(z-1)^qw=0$$

的解。藉(80)式將自變數變爲 x，卽得夏可皮多項式所滿足的方程：

$$(94)\qquad \frac{d}{dx}\left[(1-x)^{p+1}(1+x)^{q+1}\frac{dP_k^{(p,q)}(x)}{dx}\right]+$$
$$+k(p+q+k+1)(1-x)^p(1+x)^q P_k^{(p,q)}(x)=0。$$

在目前的情形下夏可皮多項式(93)當 p 和 $q\geqslant 0$ 時是下列邊值問題的解。尋找參數 λ 的數值，使得微分方程

$$(95)\qquad \frac{d}{dx}\left[(1-x)^{p+1}(1+x)^{q+1}\frac{dy}{dx}\right]+\lambda(1-x)^p(1+x)^q y=0$$

有在閉線段$[-1,+1]$中爲有限的解。我們所求的 λ 的數值是

$$(96)\qquad \lambda_k=k(p+q+k+1),$$

而對應於 λ_k 的解卽夏可皮多項式。

和勒上特多項式的情形一樣，我們利用夏可皮多項式所滿足的方程(94)不難證明以下的等式：

$$(97)\qquad \int_{-1}^{+1}(1-x)^p(1+x)^q P_m^{(p,q)}(x)P_n^{(p,q)}(x)dx=0。\qquad (m\neq n)$$

因爲夏可皮多項式具此性質，我們說：夏可皮多項式在區間$(-1,+1)$上爲正交，其權爲

$$(98)\qquad \gamma(x)=(1-x)^p(1+x)^q。$$

和勒上特多項式一樣，從(93)式可得結論：

$$(99)\qquad P_k^{(p,q)}(1)=\frac{(p+k)(p+k-1)\cdots(p+1)}{k!}。$$

現在我們要計算積分：

$$I_k=\int_{-1}^{+1}(1-x)^p(1+x)^q[P_k^{(p,q)}(x)]^2dx。$$

利用(93)式可寫：

$$I_k=\frac{(-1)^k}{k!\,2^k}\int_{-1}^{+1}P_k^{(p,q)}(x)\frac{d^k}{dx^k}[(1-x)^{p+k}(1+x)^{q+k}]dx。$$

和[102]中一般，施行分部積分，可得：

$$I_k=\frac{1}{k!\,2^k}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{p+k}(1+x)^{q+k}\frac{d^kP_k^{(p,q)}(x)}{dx^k}dx,$$

因爲 $p>-1$ 和 $q>-1$，所以積分出來的項都等於零。如前，記多項式 $P_k^{(p,q)}(x)$ 中 x^k 的係數爲 α_k，則

$$I_k=\frac{\alpha_k}{2^k}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{p+k}(1+x)^{q+k}dx。$$

引進另一積分變數 $t=\frac{1-x}{2}$：

$$I_k=\alpha_k 2^{p+q+k+1}\int_0^1 t^{p+k}(1-t)^{q+k}dt,$$

由[72]知：

$$I_k=\alpha_k 2^{p+q+k+1}B(p+k+1,\ q+k+1)=$$

$$=\alpha_k 2^{p+q+k+1}\frac{\Gamma(p+k+1)\Gamma(q+k+1)}{\Gamma(p+q+2k+2)},$$

或以 α_k 的值代入，並利用[71]公式(120)，可得：

$$I_k=\frac{2^{p+q+1}}{p+q+2k+1}\cdot\frac{\Gamma(p+k+1)\Gamma(q+k+1)}{k!\Gamma(p+q+k+1)},$$

即成立下面的公式：

$$(100)\qquad \int_{-1}^{+1}(1-x)^p(1+x)^q[P_n^{(p,q)}(x)]^2dx=$$

$$=\frac{2^{p+q+1}}{2n+p+q+1}\cdot\frac{\Gamma(n+p+1)\Gamma(n+q+1)}{n!\Gamma(n+p+q+1)}\quad(n=1,2,\cdots)。$$

當 $n=0$ 時由 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ 的關係知上式右邊爲：

$$2^{p+q+1}\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}。$$

還有一個特殊情形要注意的，就是 $p=q=-\frac{1}{2}$ 的時候。這時我們用下面的記號來記這些多項式：

$$(101)\qquad T_k(x)=C_k P_k^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x),$$

其中 C_k 是個常數。

由(93)式知 $T_k(x)$ 係由下關係決定：

$$(102)\qquad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}T_k(x)=\frac{(-1)^kC_k}{k!\,2^k}\frac{d^k}{dx^k}\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+k}\right],$$

現在我們要利用 $T_k(x)$ 所應滿足的微分方程來導出這些多項式的另外的形式。於方程(94)中置 $p=q=-\frac{1}{2}$，卽得 $T_k(x)$ 所應滿足的微分方程：

(103)
$$\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\frac{dT_k(x)}{dx}\right]+k^2T_k(x)=0。$$

在奇異點 $x=1$ 的判定方程的兩根是 0 和 $\frac{1}{2}$。和第一個根對應的解是個多項式，和第二個根對應的解則一定不是多項式。要找一個形式合宜的滿足方程(103)的多項式，可藉下式引進另一自變數 φ 以代 x：

(104)
$$x=\cos\varphi。$$

由複合函數的微分規則知

$$\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}=-\frac{d}{d\varphi}。$$

代入方程(103)，得：

$$\frac{d^2T_k(\cos\varphi)}{d\varphi^2}+k^2T_k(\cos\varphi)=0,$$

這方程的解是　　$\cos k\varphi$ 和 $\sin k\varphi$，

或對方程(103)而言，得到的解是

$$\cos(k\arccos x)\ \text{和}\ \sin(k\arccos x)。$$

利用已知的公式[I, 174)：

$$\cos k\varphi=\cos^k\varphi-\binom{k}{2}\cos^{k-2}\varphi\sin^2\varphi+\cdots,$$

可知第一個解是 x 的多項式，因此除了一個任意的常數因子外，方程的解可藉多項式表示的是

(105)
$$T_k(x)=\cos(k\arccos x),$$

這多項式稱爲契巴謝夫多項式。當 $\varphi=0$ 時 $x=1$，故知 $T_k(1)=1$，另一方面，由(99)式：

$$P_k^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(1)=\frac{1\cdot3\cdots(2k-1)}{2\cdot4\cdots2k},$$

由此可以決定(101)式中的常數因子:

$$T_k(x)=\frac{2\cdot4\cdots2k}{1\cdot3\cdots(2k-1)}P_k^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x)。\tag{106}$$

104. 保角變換與高斯方程 現在我們要來解釋高斯方程和一個保角變換的問題之間的關係,仍如前節假設 α,β 和 γ 都是實數。首先要證高斯方程(62)的解在複數平面上奇異點以外的地方不能有重零點。實際上,若方程(62)的解以 $z=z_0$ 爲高於一重的零點,即

$$w(z_0)=w'(z_0)=0,$$

則由方程(62)知 $w''(z_0)=0$。將這方程微分一次,再令 $z=z_0$,即得 $w'''(z_0)=0$,依此類推。但是我們知道,如果一個解析函數在某點的所有各階導數都等於零的話,這函數必恆等於零。恆等於零的解不是我們所要討論的。以上的證明對於任何係數爲解析函數的線性二階微分方程都可適用。剛才證明的結果由[95]的唯一存在定理也立刻可以導出。

現在考察高斯方程的兩個解的商:

$$\eta(z)=\frac{w_2(z)}{w_1(z)}。\tag{107}$$

在解析延拓時這函數可能以 $z=0,\ 1$ 及 ∞ 以及 $w_1(z)$ 的零點爲奇異點。後面這種點必爲函數(107)的單極點。若 $w_1(z_0)=0$,則可肯定 $w_2(z_0)\neq0$。實際上,如果

$$w_2(z_0)=0,$$

則此兩解可由下列初始條件決定:

$$\left.\begin{array}{ll}w_1(z_0)=0; & w_1'(z_0)=\alpha\\ w_2(z_0)=0; & w_2'(z_0)=\beta\end{array}\right\}\qquad(\alpha\text{ 和 }\beta\neq0),$$

由唯一存在定理有

$$w_2(z)=\frac{\beta}{\alpha}w_1(z),$$

即兩解 $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 非線性獨立,但我們必須假設這兩解是線性獨立

才有討論的意義。

現在考察複數 z 的上半平面。在這單通區域 B 中解析函數 $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 在解析延拓時沒有奇異點，因此都是 z 的單值正則函數。函數 (107) 在上半平面中亦爲單值，但可能有單極點。現在證明函數 (107) 的導數在奇異點以外的地方不能爲零。如 [II, 24] 所已知，這導數可以表示如下：

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{w_2(z)}{w_1(z)}\right)=\frac{C}{w_1^2(z)}e^{-\int p(z)dz}, \tag{108}$$

其中 C 爲常數，$p(z)$ 是方程 (62) 中 w' 的係數。

由 (108) 式立刻得到我們所要證明的事。記住單極點並不破壞變換的保角性的事實，我們可以肯定函數 (107) 將區域 B 保角變換爲另一區域 B_1，其內部不含支點。現在要決定區域 B_1 的境界線。

當上半平面中的點 z 趨向實軸上的點 z_0，而 z_0 不是奇異點 $0, 1$ 或 ∞ 時，函數 (107) 有一定的極限值，並且在 z_0 這點亦爲正則。因此他在實軸上三線段

$$(-\infty, 0);\quad (0, 1);\quad (1, \infty) \tag{109}$$

的內部均爲正則。現在證明當 z 趨於某一奇異點時函數 (107) 也有一定的極限値。試以 $z=0$ 這點爲例。

首先，解釋一件以後常要用的事實。設代替 $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 我們另取方程的兩個互相獨立的解 $w_1^*(z)$ 和 $w_2^*(z)$。他們可以表示爲從前兩解的線性函數：

$$w_1^*(z)=a_{11}w_1(z)+a_{12}w_2(z),$$
$$w_2^*(z)=a_{21}w_1(z)+a_{22}w_2(z),$$

其中

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0。$$

由新的解作新的函數 $\eta^*(z)$

$$\eta^*(z)=\frac{w_2^*(z)}{w_1^*(z)}=\frac{a_{21}w_1(z)+a_{22}w_2(z)}{a_{11}w_1(z)+a_{12}w_2(z)}$$

或
$$\eta^*(z)=\frac{a_{21}+a_{22}\eta(z)}{a_{11}+a_{12}\eta(z)},$$
就是說，當(107)式中兩獨立解的取法變更時對應的函數 $\eta(z)$和 $\eta^*(z)$之間可藉一行列式不等於零的分式線性變換互相關聯。

現在回頭來研究函數(107)在 $z=0$ 的鄰域中的情形。設取兩互相獨立的解為：

(110)
$$w_1(z)=F(\alpha,\beta,\gamma;z);$$
$$w_2(z)=z^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma;z)。$$

於是

(111)
$$\eta(z)=z^{1-\gamma}\frac{F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma;z)}{F(\alpha,\beta,\gamma;z)}。$$

上面的式子可以這樣來了解他：函數 $\eta(z)$在 $z=0$ 的鄰域中由(111)式定義，然後藉解析延拓在整個半平面 B 中單值地完全定義起來。由(111)式立刻可知，例如
$$\eta(z)\to 0,\ \text{若}\ z\to 0\ \text{而}\ \gamma<1。$$
如果另外選取兩個互相獨立的解，則對應的 $\eta(z)$可藉(111)的函數分式線性地表示出來，因此當 $z\to 0$ 時也有一定的極限值。

現在證明函數(107)將實軸上的線段(109)變為圓弧。實際上，例如看線段$(0,1)$，在其內取一點 z_0。以在 z_0 的初始條件來決定兩解 $w_1(z)$和 $w_2(z)$，但這些條件必須要使 $w_i(z_0)$和 $w_i'(z_0)$都是實數$(i=1,2)$。因為高斯方程中的係數也都是實的，所以 $w_1(z)$和 $w_2(z)$在 z_0 的鄰域中可以表示為具實係數的泰勒級數。這兩個解沿着線段$(0,1)$的解析延拓顯然亦可表示為具實係數的泰勒級數，換言之，對於如此選取的解，函數 $\eta(z)$在線段$(0,1)$上取實數值，故將此線段變為實軸上的另一線段。對於所有其他的選取法新的函數 $\eta(z)$ 可由此特選的 $\eta(z)$ 經過分式線性變換而得，但分式線性變換將實軸上的線段變為圓弧。因此知道函數(107)將(109)中每一線段變為一圓弧。

我們再看兩解 $w_1(z)$和 $w_2(z)$在線段$(0,1)$中取實值的情形。應用

(108)式可知函數 $\eta(z)$ 的導數在這線段上不變號，即 $\eta(z)$ 在這線段上是 z 的單調函數。換言之，當 z 以一定的方向跑過線段(0,1)時 $\eta(z)$ 亦以一定的方向跑過對應的線段。注意：這時 $\eta(z)$ 也可能跑過無限遠點，因爲和(0, 1)對應的 $\eta(z)$ 的軌跡可能是無限線段。此外，有時這線段還可以自相重疊。一般，若(107)式中的兩獨立解係任意選取，則當 z 以一定的方向沿線段(0, 1)進行時，$\eta(z)$ 亦以一定的方向沿圓弧進行，有時線段(0,1)可能不是和圓周的一部分相對應，而是和自相重疊的全部圓周相對應。

由所有以上的論斷可得下面的結果：函數(107)，即高斯方程的兩個獨立解的商，將上半平面保角變換爲三段圓弧所圍成的區域，換言之，即一個弧三角形，且其內部不包含支點。現在要決定這弧三角形的諸角。設此三角形的一頂點 A 與 $z=0$ 對應。取(110)式中兩解爲基本解，假設 $\gamma<1$。回到公式(111)。在 $z=0$ 的鄰域中當 $z>0$ 時如果假設 $\arg z=0$，則 $\eta(z)>0$。繞着 $z=0$ 越過上半平面以後，我們有 $\arg z=\pi$，從而 $\arg z^{1-\gamma}=\pi(1-\gamma)$，這時(111)式中的分式當 z 與零甚近時取實值，且與1甚近。因此設 $\gamma<1$，則在 $\eta(z)$ 平面上得到兩條直線，其一從原點沿正實軸方向前進，另一在原點與他成 $\pi(1-\gamma)$ 的角度。若 $\gamma>1$，則可不取(111)式的比值而取其倒數爲 $\eta(z)$。因此對於這樣選取的基本解我們的弧三角形中與 $z=0$ 對應的頂角爲 $\pi|1-\gamma|$。當基本解的選取變更時，新得到的弧三角形可由前述的弧三角形經過一個分式線性變換而得到，因爲這種變換是保角的，所以在一般的情形和 $z=0$ 對應的頂角 A 的大小也等於 $\pi|1-\gamma|$。同樣，可以算出弧三角形的對應於 $z=1$ 和 $z=\infty$ 的其他兩頂角的大小依次等於 $\pi|\gamma-\alpha-\beta|$ 和 $\pi|\beta-\alpha|$。如同所有的保角變換一樣，諸角間的次序可由下面的事實決定：即當 z 沿實軸向正方向移動時，$\eta(z)$ 沿弧三角形境界上某一方向進行，常使得三角形的內部在其左邊。

以上的結果可以用下面一句話來總結：$\eta(z)$ 平面中弧三角形的頂

角角度等於方程(62)在對應的奇異點的判定方程的兩根之差的絕對值用π來乘。注意：這性質當判定方程的兩根之差等於零(兩圓弧相切)或整數時也成立，證明從略。

反過來，我們可以證明：任一由圓弧所圍成的三角形，卽使是多葉的也好，祇要其內部及境界線上不含支點，便可以由適當選取參數 α，β，γ 以後的高斯方程的某兩個獨立解的商式將上半平面保角變換而得。特別，通常的直線三角形也是弧三角形的一個特例。這時完成保角變換的函數可以取得特別簡單，就是克利斯多夫積分。

105. 非正則奇異點 現在我們轉到非正則奇異點鄰域中解的表示的問題。將自變數施行分式線性變換以後常可使這奇異點成爲無限遠點，以後我們就假設無限遠點是非正則奇異點。設方程爲

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0。$$

如果 $p(z)$和 $q(z)$在無限遠點的鄰近有如下的展開式：

$$p(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{z^k};\quad q(z)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{b_k}{z^k},\tag{112}$$

則由 [99] 知這點是正則奇異點。現在我們要假設係數 $p(z)$和 $q(z)$ 的展開式不是(112)的形式，但仍假設 $p(z)$和 $q(z)$ 在無限遠點鄰域中的展開式不含有 z 的正數冪，就是說，祇考察下列形式的方程：

$$w''+\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots\right)w'+\left(b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\cdots\right)w=0,\tag{113}$$

其中係數 a_0，b_0和 b_1 至少有一個不等於零。如果我們要想使式樣爲：

$$w=z^{\rho}\left(c_0+c_1\frac{1}{z}+\cdots\right)\qquad (c_0\neq 0)\tag{114}$$

的函數成爲方程(113)的形式上的解，那末以此代入(113)的左邊，結果祇有一項含 z^{ρ} 的，卽 $b_0c_0z^{\rho}$。由此可知，若 $b_0\neq 0$，則方程(113)要以(114)爲形式上的解亦屬不可能。要想法去掉係數 b_0，可藉下式引進另一未知函數 u 以代 w：

$$w=e^{\alpha z}u。$$

從而

$$w'=e^{\alpha z}u'+\alpha e^{\alpha z}u;\quad w''=e^{\alpha z}u''+2\alpha e^{\alpha z}u'+\alpha^2e^{\alpha z}u,$$

代入(113),得到另一方程

$$u''+\left(2\alpha+a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots\right)u'+$$

$$+\left(\alpha^2+\alpha a_0+b_0+\frac{\alpha a_1+b_1}{z}+\frac{\alpha a_2+b_2}{z^2}+\cdots\right)u=0。$$

選取 α 使滿足條件

$$\alpha^2+\alpha a_0+b_0=0。\tag{115}$$

則最後所得方程爲:

$$u''+\left(2\alpha+a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots\right)u'+\tag{116}$$

$$+\left(\frac{b'_1}{z}+\frac{b'_2}{z^2}+\cdots\right)u=0\qquad(b'_k=\alpha a_k+b_k),$$

其中 α 是方程(115)的一根。這方程是可以形式上被(114)所滿足的。

再令

$$u=z^\rho v,$$

則有

$$u'=z^\rho v'+\rho z^{\rho-1}v;\quad u''=z^\rho v''+2\rho z^{\rho-1}v'+\rho(\rho-1)z^{\rho-2}v。$$

代入(116)式卽得函數 v 的方程:

$$v''+p_1(z)v'+q_1(z)v=0,\tag{117}$$

其中

$$\left\{\begin{aligned}p_1(z)&=2\alpha+a_0+\frac{2\rho+a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\cdots\\ q_1(z)&=\frac{(2\alpha+a_0)\rho+b'_1}{z}+\frac{\rho(\rho-1)+a_1\rho+b'_2}{z^2}+\\ &\quad+\frac{a_2\rho+b'_3}{z^3}+\frac{a_3\rho+b'_4}{z^4}+\cdots。\end{aligned}\right.\tag{118}$$

現在決定 ρ,使得係數 $q_1(z)$ 中不含 z^{-1} 的項,就是使 ρ 滿足下面的條件:

$$(2\alpha+a_0)\rho+b'_1=0;\quad \rho=-\frac{\alpha a_1+b_1}{2\alpha+a_0}。\tag{119}$$

這裏我們假設(115)式的兩根不相等，因此 $2\alpha+a_0\neq 0$。

對於 v 我們現在得到的方程是：

$$v''+\left(2\alpha+a_0+\frac{2\rho+a_1}{z}+\cdots\right)v'+ \tag{120}$$
$$+\left(\frac{\rho^2+(a_1-1)\rho+b'_2}{z^2}+\frac{a_2\rho+b'_3}{z^3}+\cdots\right)v=0。$$

這方程是可以在形式上被下面形狀的級數

$$v=c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots \tag{121}$$

所滿足的。

將(121)式微分，代入(120)式的左邊，利用未定係數法可得一系的方程，由這些方程可以逐步的決定 $c_1, c_2, \cdots$，但 c_0 卻是任意的常數因子。這些方程的第一個是：

$$-(2\alpha+a_0)c_1+[\rho^2+(a_1-1)\rho+b'_2]c_0=0。$$

由此

$$c_1=\frac{\rho^2+(a_1-1)\rho+\alpha a_2+b_2}{2\alpha+a_0}c_0。 \tag{122}$$

最後對於方程(113)得到函數 w 的展開式：

$$w=e^{\alpha z}z^{\rho}\left(c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots\right), \tag{123}$$

這是方程(113)的形式上的解。如果二次方程(115)的兩根不相等，那末利用每一個根我們可以藉上述方法作出一個形式如(123)的級數來。但是，一般而論，這級數對於任何的 z 都是發散的。

舉一個特例，取方程

$$w''+\left(a_0+\frac{a_1}{z}\right)w'+\frac{b_2}{z^2}w=0。 \tag{124}$$

現在可設 $\alpha=\rho=0$。以形式如(121)的級數代入方程(124)的左邊，我們得到如下的決定係數的公式：

$$[n(n+1)-na_1+b_2]c_n-(n+1)a_0c_{n+1}=0。$$

作級數(121)中相鄰兩項的比，利用上式可得：

$$\frac{c_{n+1}}{z^{n+1}}:\frac{c_n}{z^n}=\frac{n(n+1)-na_1+b_2}{(n+1)a_0}\cdot\frac{1}{z},$$

由此立刻知道對於任何的 z 值上面的比值與 n 同時趨於無窮大，從而無窮級數(121)對任何的 z 皆爲發散。

驟然看來，似乎(123)式中級數的發散性已剝奪了這展開式的一切價值了。但是我們仍舊可以看到，他是可以用來表示方程(113)的解的。要說明這個事實，我們需要引進一個新的概念，即函數的漸近展開式。

再看方程(115)有重根的情形。這時 $2\alpha+a_0=0$，方程(116)變爲：

$$u''+\left(\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots\right)u'+\left(\frac{b_1'}{z}+\frac{b_2'}{z^2}+\cdots\right)u=0$$

引進另一自變數 $t=\sqrt{z}$ 以代 z，得到方程：

$$\text{(125)}\qquad \frac{d^2u}{dt^2}+\left(\frac{2a_1-1}{t}+\frac{2a_2}{t^3}+\frac{2a_3}{t^5}+\cdots\right)\frac{du}{dt}+$$
$$+\left(4b_1'+\frac{4b_2'}{t^2}+\frac{4b_3'}{t^4}+\cdots\right)u=0。$$

對這微分方程而言，二次方程(115)變爲：$\alpha^2+4b_1'=0$，如果 $b_1'\neq0$，則對方程(125)有和從前一樣的情形，即 α 的兩根不相等。如果 $b_1'=0$，那末 $t=\infty$ 就是方程(125)的正則奇異點。

106. 漸近展開式　設有無窮級數

$$\text{(126)}\qquad c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots,$$

以 $S_n(z)$ 表示其首先 n 項之和：

$$S_n(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\cdots+\frac{c_{n-1}}{z^{n-1}}。$$

級數收斂的意義就是當 n 無限增大時 $S_n(z)$ 有極限。現在我們來作另一方面的研究：把 n 固定而令 z 沿一定半直線 L 趨於無限。以後我們常取這半直線爲正實軸，卽常設 $z>0$。

假設有一函數 $f(z)$ 定義在 L 上，且對任何固定的 n 當 $z\to\infty$ 時

$$f(z)-S_n(z)$$

是比 $\frac{1}{z^{n-1}}$ 階數更高的無窮小，就是說，差 $f(z)-S_n(z)$ 是個比 $S_n(z)$ 中最後一項階數更高的無窮小。這條件可以用下面的式子來表示：

(127)
$$\lim_{z\to\infty}[f(z)-S_n(z)]z^{n-1}=0。\qquad (在 L 上)$$

當這條件成立時我們稱級數(126)是函數 $f(z)$ 在 L 上的漸近展開式，記作：

(128)
$$f(z)\sim c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots。\qquad (在 L 上)$$

因爲 $\frac{c_n}{z^n}\cdot z^{n-1}\to 0$ 當 $z\to\infty$，條件(127)與下式相抵：

(129)
$$\lim_{z\to\infty}\left[f(z)-\left(c_0+\frac{c_1}{z}+\cdots+\frac{c_n}{z^n}\right)\right]z^{n-1}=0。$$

例如，當 $x>0$ 時，考察由下之積分所定義的函數：

(130)
$$f(x)=\int_x^\infty t^{-1}e^{x-t}\,dt。$$

逐次施行分部積分，可得：

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}+(-1)^n n!\int_x^\infty\frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt。$$

現在做一級數

(131)
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\frac{3!}{x^4}+\cdots$$

利用比率判定法易知這級數對於任何的 x 皆爲發散。現在要證明他就是函數(130)的漸近展開式。我們有：

$$f(x)-S_{n+1}(x)=(-1)^n n!\int_x^\infty\frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt,$$

因爲 $t\geqslant x$，被積分函數中的 e^{x-t} 處於 0 與 1 之間，將這因子除去，即得：

$$|f(x)-S_{n+1}(x)|<n!\int_x^\infty\frac{dt}{t^{n+1}}=(n-1)!\frac{1}{x^n},$$

由此可知條件(129)顯然成立，從而

(132)
$$\int_x^\infty t^{-1}e^{x-t}\,dt\sim\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\frac{3!}{x^4}+\cdots$$

設有漸近展開式(128)。當 $n=1$ 時條件(127)成爲：

$$\lim_{z\to\infty}[f(z)-c_0]=0,$$

即
$$c_0=\lim_{z\to\infty}f(z)。$$

其次，這條件當 $n=2$ 時是：

$$\lim_{z\to\infty}\left[f(z)-c_0-\frac{c_1}{z}\right]z=0,$$

從而
$$c_1=\lim_{z\to\infty}[f(z)-c_0]z,$$

一般，成立：

(133) $$c_n=\lim_{z\to\infty}\left[f(z)-\left(c_0+\frac{c_1}{z}+\cdots+\frac{c_{n-1}}{z^{n-1}}\right)\right]z^n。$$

如果漸近展開式存在的話，那末這些公式就唯一地決定了展開式中的係數。因此知道一個函數的漸近展開式祇可能有一個。

試在半直線 $x>0$ 上面考察函數 e^{-x}。如我們所知，對於任何的 n 有

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}x^n=0,$$

就是說，函數 e^{-x} 在半直線 $x>0$ 上的漸近展開式是 $e^{-x}\sim 0$。因此，假如函數 $f(x)$ 在半直線 $x>0$ 上有漸近展開式的話，那末函數 $f(x)+e^{-x}$ 就有和 $f(x)$ 同樣的漸近展開式。所以我們看到：在函數 $f(x)$ 上添加一項比 x 的任何負整數冪都減少得快的 e^{-x} 並不會變更 $f(x)$ 的漸近展開式。

利用漸近展開式的定義可以證明漸近展開式的逐項相乘和逐項積分的規則，即若：

$$f(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{z^k}\ \text{和}\ \varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k}{z^k},$$

則
$$f(z)\varphi(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_kd_0+c_{k-1}d_1+\cdots+c_0d_k}{z^k}。$$

同樣，若
$$f(z)\sim\sum_{k=2}^{\infty}\frac{c_k}{z^k},$$

則
$$\int_z^{\infty}f(z)dz\sim\sum_{k=2}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)z^{k-1}}。$$

證明從略，因爲由漸近展開式的定義立刻可得。

可以證明(123)式中的級數是某一函數的漸近展開式，即存在方程(113)的解 $w(z)$，對於他在半直線 $z>0$ 上成立下面的漸近展開式：

$$w(z)e^{-\alpha z}z^{-\rho}\sim c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots$$

我們在下面幾節中就要對於方程(113)的一種特別情形，即當 $k\geqslant 2$ 時 a_k 和 b_k 都等於零的情形，證明這件事實。爲此，我們要用一種特別的辦法求方程(113)的解，即求這方程的路積分形式的解。首先我們要研究如何藉助於路積分來解微分方程式的問題。

在所有以上的敍述中我們假設當 z 沿某一半直線 L 趨於無限遠時條件(127)成立。如果當 z 在某一扇形區域中趨向無限遠時這條件成立的話，則稱在此扇形區域中成立漸近展開式(128)。

107. 拉普拉斯變換 考察方程

$$w''+\left(a_0+\frac{a_1}{z}\right)w'+\left(b_0+\frac{b_1}{z}\right)w=0,$$

或以 z 乘之

$$zw''+(a_0z+a_1)w'+(b_0z+b_1)w=0. \tag{134}$$

現在要找這方程的具有下面的形式的解：

$$w(z)=\int_l v(z')e^{zz'}dz', \tag{135}$$

其中 $v(z')$ 是 z' 的未知函數，l 是與 z 無關的未知積分道路。關於 z 微分，得：

$$w'(z)=\int_l v(z')z'e^{zz'}dz';\quad w''(z)=\int_l v(z')z'^2e^{zz'}dz'. \tag{136}$$

以 z 乘(135)式兩邊，再行分部積分，得：

$$zw(z)=\int_l v(z')de^{zz'}=[v(z')e^{zz'}]_l-\int_l\frac{dv(z')}{dz'}e^{zz'}dz,$$

其中記號

$$[\varphi(z')]_l$$

表示當 z' 走完線路 l 以後函數 $\varphi(z')$ 所得到的改變量。同樣，我們有

$$zw'(z)=[v(z')z'e^{zz'}]_l-\int_l \frac{d[v(z')z']}{dz'}e^{zz'}dz'$$

和
$$zw''(z)=[v(z')z'^2e^{zz'}]_l-\int_l \frac{d[v(z')z'^2]}{dz'}e^{zz'}dz'。$$

首先我們要求 $v(z')$ 滿足下面的條件：

(137)
$$[v(z')(z'^2+a_0z'+b_0)e^{zz'}]_l=0。$$

將以上所得諸結果代入方程(134)的左邊，由(137)式知道積分出來的項等於零，因此得到下面的方程：

$$\int_l\left\{\frac{d[v(z')z'^2]}{dz'}+a_0\frac{d[v(z')z']}{dz'}+b_0\frac{dv(z')}{dz'}-a_1z'v(z')-\right.$$
$$\left.-b_1v(z')\right\}e^{zz'}dz'=0。$$

假如函數 $v(z')$ 滿足方程

(138)
$$\frac{d[v(z')z'^2]}{dz'}+a_0\frac{d[v(z')z']}{dz'}+b_0\frac{dv(z')}{dz'}-a_1z'v(z')-b_1v(z')=0$$

的話，那末前面的微分方程自然也滿足了。

考察二次方程

(139)
$$z'^2+a_0z'+b_0=0,$$

這就是方程(115)，並假設他有兩個不同的根 α_1 和 α_2。由方程(138)有：

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dz'}=\frac{(a_1-2)z'+(b_1-a_0)}{(z'-\alpha_1)(z'-\alpha_2)},$$

或寫成最簡分式：

(140)
$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dz'}=\frac{p-1}{z'-\alpha_1}+\frac{q-1}{z'-\alpha_2},$$

其中
$$p=\frac{(a_1-2)\alpha_1+(b_1-a_0)+(\alpha_1-\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2};$$

$$q=\frac{(a_1-2)\alpha_2+(b_1-a_0)+(\alpha_2-\alpha_1)}{\alpha_2-\alpha_1}。$$

另一方面，由二次方程(139)得：

$$\alpha_1+\alpha_2=-a_0,$$

上列 p 和 q 的表示式遂可改寫爲：

(141) $$p=\frac{a_1\alpha_1+b_1}{2\alpha_1+a_0};\quad q=\frac{a_1\alpha_2+b_1}{2\alpha_2+a_0}。$$

和(119)式比較，知道

(142) $$p=-\rho_1;\quad q=-\rho_2,$$

其中 ρ_1 和 ρ_2 是 ρ 的兩個不同數值，係由方程(115)的不同兩根 α_1 和 α_2 藉(119)式而得到的。

將方程(140)積分，得到：

(143) $$v(z')=C(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1},$$

從而方程(134)的解是

(144) $$w(z)=C\int_l(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1}e^{zz'}dz',$$

其中 C 是任意常數，又由(137)和(143)知線路 l 應該滿足條件

(145) $$[(z'-\alpha_1)^p(z'-\alpha_2)^q e^{zz'}]_l=0。$$

103. 解的不同選取法 用不同的方法選取滿足條件(145)的線路 l，我們可以得到方程(134)的不同的解。和貝塞爾方程一樣，這方程以 $z=0$ 爲正則奇異點，以 $z=\infty$ 爲非正則奇異點。在 $z=0$ 的判定方程爲

$$\rho(\rho-1)+a_1\rho=0,$$

他的兩根是 $\rho_1=0$ 和 $\rho_2=1-a_1$，爲簡單起見，假設 $1-a_1$ 不是正整數。這樣，方程(134)的一個解是在 $z=0$ 爲正則的函數，這解在全平面上可以形式爲

(146) $$1+c_1z+c_2z^2+\cdots$$

的級數來表示。

首先，說明如何選取積分線路 l，使得(144)式恰好就是這個在原點爲正則的解。

(144)式的被積分函數以 $z'=\alpha_1$ 和 $z'=\alpha_2$ 爲奇異點。一般而論，這些奇異點同時也是支點，因爲，一般 p 和 q 並非整數。從正方向繞 $z'=\alpha_1$ 這點一週以後，被積分函數得到一個乘數 $e^{(p-1)2\pi i}=e^{p2\pi i}$，而繞

$z'=\alpha_2$ 一週後他得到一個乘數 $e^{(q-1)2\pi i}=e^{q2\pi i}$，以後我們常設 p 和 q 皆非整數。

在平面上取一有限點 z_0，而不是 α_1 和 α_2，從 z_0 出發分別繞過 α_1 和 α_2 的閉線路依次記爲 l_1 和 l_2。

以記號 (l_1, l_2) 表示由下列環路構成的線路：先沿 l_1 的正方向走一週，再沿 l_2 的正方向走一週，再沿 l_1 的負方向走一週，最後又沿 l_2 的負方向走一週。走完第一條環路以後函數(143)得到乘數 $e^{p2\pi i}$。走完第二條環路以後他得到乘數 $e^{q2\pi i}$，走完第三條環路後得到乘數 $e^{-p2\pi i}$，最後，走完第四條環路時得到乘數 $e^{-q2\pi i}$，這樣，最後回到 z_0 時函數(143)也回到從 z_0 出發時的同一支頁，因此若取 l 爲閉線路 (l_1, l_2)，則 l 滿足條件(145)，從而(144)式中的 $w(z)$ 就是方程(134)的解。注意：如果我們取 l 爲不包含被積分函數的奇異點 α_1 和 α_2 在其內部的閉線路，那末被積分函數當然也回到他的始值，但由勾犀定理知道沿着這種閉線路的積分(144)必等於零，故得不到方程式(134)的解。我們現在所取的線路則是既繞過奇異點而函數又能回到原來支頁的。

這樣，我們的解就是

$$w_0(z)=C\int_{(l_1, l_2)}(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1}e^{zz'}dz'。\tag{147}$$

變數 z' 位於全部在有限距離之內的線路上，故可將 $e^{zz'}$ 寫成級數的形式：

$$e^{zz'}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}z'^k,$$

這級數在積分線路上爲一致收斂。代入(147)式然後逐項積分，即得：

$$w_0(z)=C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\int_{(l_1, l_2)}z'^k(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1}dz',\tag{148}$$

其中 C 爲任意常數，易知這樣做出來的解恰好就是在原點爲正則的解。我們祇要注意下面的事實好了：當 p 和 q 不都是正整數時這解不會恆等於零。

易見(148)式中的積分數值和出發點 z_0 的選取無關。這事實可以藉勾犀定理證明之，因爲走完線路 (l_1, l_2) 一週以後我們仍回到函數的原來支頁，故可視 (l_1,l_2) 爲閉線路，因此引用勾犀定理也是完全合法的。

現在我們看一個特別情形，即當 p 和 q 的實數部分都大於零的情形。假設 z_0 位於直線段 $\alpha_1\alpha_2$ 上 α_1 這點的鄰近，l_1 是個以 α_1 爲中心的小圓，l_2 由直線段 z_0z_1 和一個以 α_2 爲中心的小圓構成，其中直線段 z_0z_1 顯然要經過兩次。我們要證明當這兩個圓的半徑無限縮小時在圓周上的積分數值都趨於零。試以中心爲 α_1 的圓周爲例，爲簡單起見假設 p 是實數，由條件他應該大於零。設圓的半徑爲 ε。在這圓周上被積分函數可估計如下：

$$|z'^k(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1}| = |z'-\alpha_1|^{p-1}\cdot|z'^k(z'-\alpha_2)^{q-1}| < \varepsilon^{p-1}M,$$

其中 M 是個正常數。對於在這圓周上的整個積分可作如下的估計：

$$\left|\int z'^k(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1}\,dz'\right| < \varepsilon^{p-1}M\,2\pi\varepsilon = \varepsilon^p\,2\pi M,$$

由此立刻可知這積分與 ε 同時趨於零。對於複指數 $p=p_1+ip_2$，$p_1>0$，我們有：

$$|(z'-\alpha_1)^{p-1}| = |e^{[(p_1-1)+ip_2]\lg(z'-\alpha_1)}| = e^{(p_1-1)\lg|z'-\alpha_1|-p_2\arg(z'-\alpha_1)},$$

或

$$|(z'-\alpha_1)^{p-1}| = \varepsilon^{p_1-1}\cdot e^{-p_2\arg(z'-\alpha_1)},$$

同樣可得所需的結果。

這樣，就上述的積分路線而言，沿圓周的積分可以藉取極限而略去，最後在 l_2 上的積分就變成從 α_1 沿直線段 $\alpha_1\alpha_2$ 積分到 α_2，繞過 α_2 這點，然後又沿原線段回到 α_1。

記住被積分函數繞過 α_1 和 α_2 所得到的乘數，對於解(147)即得到下面這公式：

$$w_0(z) = Ce^{p2\pi i}(1-e^{q2\pi i})\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1}e^{zz'}\,dz' +$$

$$+C(e^{q2\pi i}-1)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1}e^{zz'}\,dz',$$

或

$$w_0(z) = -C(e^{p2\pi i}-1)(e^{q2\pi i}-1)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1}e^{zz'}\,dz'。$$

設 p 和 q 都非整數，將上式右邊積分前面兩因子併入常數 C 中，我們現在就可將方程(134)的正則(在原點)解簡單地用線段 $\alpha_1\alpha_2$ 上的積分來表示：

$$w_0(z) = C\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1}e^{zz'}\,dz'。\tag{149}$$

這一結果實際上是立刻就可以得到的。因爲若 p 和 q 的實數部分都大於零，則當 $z'=\alpha_1$ 和 $z'=\alpha_2$ 時(145)式方括弧中的函數顯然等於零，故可取 l 爲線段 $\alpha_1\alpha_2$，這樣就得到了(149)式。且在這論斷中我們並沒有用到 p 和 q 不是整數的事實。

現在再回到一般的情形。注意：如果積分路線祇取一個環路 l_1 或 l_2，那末，一般而論，積分的數值就和出發點 z_0 有關，當然也不是方程(134)的解了。但是我們可以適當的選取 z_0 和線路 l_1 或 l_2，使得積分仍舊是方程(134)的解。

以後常設 z 爲正數。在這條件下，若 z' 如此地趨於無限遠，使得他的實數部分趨於 $(-\infty)$，而虛數部分常爲有界［這時我們稱 z' 趨於 $(-\infty)$］，則可知

(150)
$$(z'-\alpha_1)^p(z'-\alpha_2)^q e^{zz'}$$

必趨於零。因此若取 l_1' 爲兩端在 $(-\infty)$ 而環繞 α_1 的線路，則在這線路的兩端(150)式中函數的值爲零，於是條件(145)滿足，而在這線路上的積分就是方程(134)的解。同樣，若取 l_2' 爲從 $(-\infty)$ 出發從正方向繞過 α_2 然後再回到 $(-\infty)$ 的線路，則可得方程(134)的第二個解。寫出來就是：

(151)
$$\begin{cases} w_1(z)=\int_{l_1'}(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1}e^{zz'}\,dz' \\ w_2(z)=\int_{l_2'}(z'-\alpha_1)^{p-1}(z'-\alpha_2)^{q-1}e^{zz'}\,dz'。\end{cases}$$

被積分函數以 $z'=\alpha_1$ 和 $z'=\alpha_2$ 爲支點。要使他成爲單値，可以從這兩點引平行於實軸的割線到 $(-\infty)$ 去，但設 α_1 和 α_2 兩數的虛數部分不相等(圖 68)。在這被割以後的平面上我們如此選取被積分函數的一支，使當 $z'-\alpha_1>0$ 時，即當 z' 在第一割線的延長線上的時候，$\arg(z'-\alpha_1)=0$；又當 $z'-\alpha_2>0$ 時 $\arg(z'-\alpha_2)=0$。線路 l_1' 和 l_2' 則如圖 68 所示。在這些條件下，(151)中的兩解對於 $z>0$ 就有完全確定的數値了。

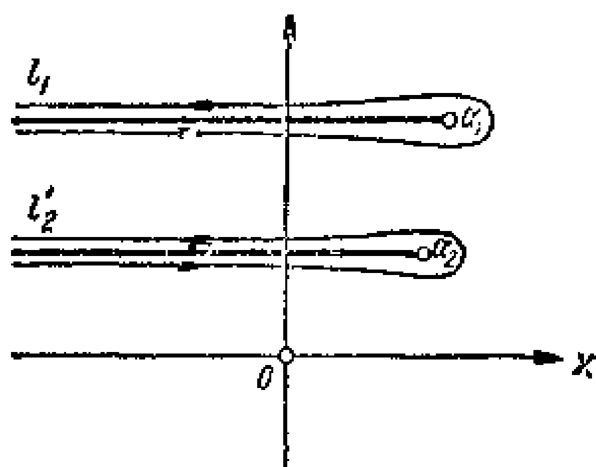


圖 68

注意：當 $z'\to-\infty$ 時不僅對於 z 的正數値指數函數 $e^{zz'}\to 0$，並且對於所有的 z，滿足條件

(152)
$$\frac{\pi}{2}>\arg z>-\frac{\pi}{2}$$

的，亦有 $e^{zz'}\to 0$。實際上，置 $z=x+iy$，我們有 $x>0$。此外，$z'=x'+$ $+iy'$，其中 $x'\to-\infty$，$|y'|$ 爲有界。這樣，乘積 zz' 的實數部分亦趨於 $(-\infty)$，而函數 (150) 在 l_1 和 l_2 的端點就等於零。因此對於扇形區域 (152) 中所有 z 的數值 (151) 式亦唯一的決定兩個解的數值。

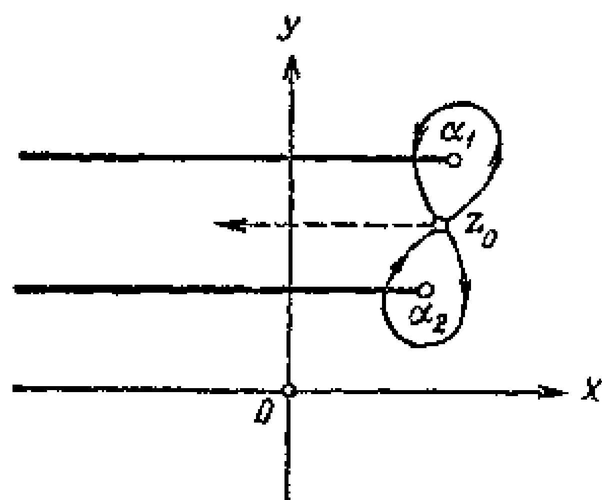


圖　69

現在要建立方程 (134) 的在原點爲正則的解和 (151) 式中兩個解的關係。爲了以後應用於貝塞爾方程起見，我們只討論 $p=q$ 的情形。這時我們要得到正則（在原點）解可以不取從前的 (l_1, l_2) 做積分線路，而取一個更簡單的線路：即從一點 z_0 出發，以正方向繞 α_1 一週，回到 z_0，然後又以負方向繞 α_2 一週。被積分函數在第一次回到 z_0 時得到乘數 $e^{p2\pi i}$，而在第二次回到 z_0 時得到乘數 $e^{-q2\pi i}=e^{-p2\pi i}$，因此又和出發時的數值相等，從而條件 (145) 滿足。如前，這樣做出來的解和 z_0 這點的選擇無關。將 z_0 沿着經過 α_1 的割線 γ_1 的下岸引向 $(-\infty)$ 去，但不與 α_1 和 α_2 相遇（圖 69）。由繞 α_1 的環路我們得到解 w_1。走完這環路以後我們到達 γ_1 的上岸，此後就應從負方向繞過 α_2。如果從 γ_1 的下岸出發走完這環路的話，我們可以得到解 $(-w_2)$。但由 γ_1 的下岸到上岸，被積分函數得到一個乘數 $e^{2p\pi i}$。所以從 γ_1 的上岸沿負方向繞 α_2 一週時得到的是 $(-e^{p2\pi i}w_2)$。最後，我們得到下面的規則：當 $p=q$ 時沿着圖 69 所示的線路積分而得到的正則解可藉 (151) 的兩解表示爲：

$$w_1(z)-e^{p2\pi i}w_2(z)。\tag{153}$$

109. 解的漸近表示式　我們現在要導出 (151) 中兩解的漸近展開

式，當 z 取大的正數值時。記住這些解對於扇形區域(152)中的 z 都已有定義。先從第一個解開始。由下式引進另一積分變數 t 以代 z'：

(154) $$z'-\alpha_1=t,$$

又記 $\beta=\alpha_1-\alpha_2$。經過這變換以後第一個解成爲：

(155) $$w_1(z)=\int_{l_0} t^{p-1}(t+\beta)^{q-1}e^{z(\alpha_1+t)}dt,$$

其中 l_0 是從 $t=-\infty$ 出發繞過原點的閉線路。被積分函數以 $t=0$ 和 $t=-\beta$ 爲支點。代替 69 圖我們在 t 平面上也有兩條割線，從 $(-\infty)$ 到 $t=0$ 和 $t=-\beta=\alpha_2-\alpha_1$，並且當 $t>0$ 和 $t+\beta>0$ 時，即當 t 在這兩割線的延長線上的時候，有 $\arg t=0$ 和 $\arg(t+\beta)=0$。

當 $|t|<|\beta|$ 時由牛頓二項式公式得：

(156) $$(t+\beta)^{q-1}=\beta^{q-1}\left(1+\frac{t}{\beta}\right)^{q-1}=\sum_{k=0}^{\infty}d_k t^k,$$

其中

(157) $$d_k=\beta^{q-1}\beta^{-k}\frac{(q-1)(q-2)\cdots(q-k)}{k!}。\qquad (d_0=\beta^{q-1})$$

由前關於具有從 $(-\beta)$ 到 $(-\infty)$ 的割線的 t 平面中 $\arg(t+\beta)$ 的條件，我們應設在 β^{q-1} [即當 $t=0$ 時函數(156)的值]中 β 的幅角受到下面的限制：

(158) $$-\pi<\arg\beta<\pi,$$

這裏設 β 不是負實數。

若 $|t|\geqslant|\beta|$，則(156)式不能用，這時我們就簡單地記：

$$(t+\beta)^{q-1}=d_0+d_1t+\cdots+d_nt^n+R_n(t),$$

其中

(159) $$R_n(t)=(t+\beta)^{q-1}-(d_0+d_1t+\cdots+d_nt^n)。$$

利用上列公式，可得：

(160) $$w_1(z)=e^{\alpha_1 z}\sum_{k=0}^{n}d_k\int_{l_0}e^{zt}t^{p+k-1}dt+e^{\alpha_1 z}\int_{l_0}e^{zt}t^{p-1}R_n(t)dt。$$

考察等式右邊的和。由下式引進另一積分變數 τ 以代 t:

$$zt=-\tau=e^{-\pi i}\tau,$$

則
$$\int_{l_0} e^{zt}t^{p+k-1}dt=e^{-\pi pi}(-1)^k z^{-p-k}\int_\lambda e^{-\tau}\tau^{p+k-1}d\tau,$$

其中積分道路 λ 是從 $\tau=+\infty$ 出發，由正方向繞過 $\tau=0$ 的割線。由 $zt=e^{-\pi i}\tau$ 得 $\tau=ze^{\pi i}t$，但設 $z>0$，$\arg z=0$，即平面 τ 可由平面 t 繞着原點旋轉角度 π 而得，這時 t 平面上割線 l_0 的下岸，那裏 $\arg t=-\pi$ 的，變爲 τ 平面上割線 λ 的上岸，由上面的變換式知道在這上岸應有 $\arg\tau=0$。

由[74]所證上述路積分和 $\Gamma(z)$ 的關係，我們有:

$$\int_{l_0} e^{zt}t^{p+k-1}dt=e^{-\pi pi}(-1)^k z^{-p-k}(e^{(p+k)2\pi i}-1)\Gamma(p+k),$$

代入(160)式，得:

$$w_1(z)=e^{\alpha_1 z}z^{-p}(e^{2\pi pi}-1)e^{-\pi pi}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k d_k\Gamma(p+k)z^{-k}+ \\ +e^{\alpha_1 z}\int_{l_0} e^{zt}t^{p-1}R_n(t)dt, \tag{161}$$

或

$$e^{-\alpha_1 z}z^p w_1(z)=e^{-\pi pi}(e^{2\pi pi}-1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k d_k\Gamma(p+k)z^{-k}+ \\ +z^p\int_{l_0} e^{zt}t^{p-1}R_n(t)dt。 \tag{162}$$

現在證明當 $z>0$ 時無窮級數

$$e^{-\pi pi}(e^{2\pi pi}-1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(p+k)d_k}{z^k} \tag{163}$$

是函數 $e^{-\alpha_1 z}z^p w_1(z)$ 的漸近展開式。

爲此，我們必須證明 z^n 與(162)式右邊第二項的積以零爲極限，即

$$\lim_{z\to\infty} z^{n+p}\int_{l_0} e^{zt}t^{p-1}R_n(t)dt=0。$$

取積分道路 l_0 爲下之線路:實軸上的線段 $(-\infty,-r)$，以 $t=0$ 爲

中心,半徑等於 r 的圓周,和實軸上的線段$(-r,-\infty)$,其中 r 是個正數。

首先證明,當 $z\to+\infty$ 時

$$(164)\qquad z^{n+p}\int_{-\infty}^{-r}e^{zt}t^{p-1}R_n(t)dt$$

的極限爲零。顯然,對於繞過 $t=0$ 以後沿着線段$(-r,-\infty)$的積分也成立同樣的結果,因爲這個繞道祇添加一個乘數 $e^{(p-1)2\pi i}$。

回到(159)式,知可取正數 N 甚大,使當 $t\to-\infty$ 時

$$\left|\frac{R_n(t)}{t^N}\right|\to0,$$

因此在全部積分路線上商式 $\frac{R_n(t)}{t^N}$ 的模爲有界,故可得不等式

$$(165)\qquad |R_n(t)|<m|t|^N\qquad(-\infty<t\leqslant-r),$$

其中 m 是個固定的正數。假設 ε 是個很小的正數,回憶指數函數比任何冪函數都增加得更快的事實,由(165)式可得

$$\frac{t^{p-1}R_n(t)}{e^{-\varepsilon t}}\to0 \text{ 當 } t\to-\infty, \text{ 或 } |t^{p-1}R_n(t)|<m_1e^{-\varepsilon t}\quad(-\infty<t\leqslant-r),$$

其中 m_1 爲一正常數。

這樣,對(164)可作如下的估計:

$$\left|z^{n+p}\int_{-\infty}^{-r}e^{zt}t^{p-1}R_n(t)dt\right|<z^{n+p}\left|\int_{-\infty}^{-r}m_1e^{(z-\varepsilon)t}dt\right|,\qquad(z>0)$$

積分以後即得:

$$\left|z^{n+p}\int_{-\infty}^{-r}e^{zt}t^{p-1}R_n(t)dt\right|<\frac{|z^{n+p}|}{z-\varepsilon}m_1e^{-(z-\varepsilon)r}。$$

由此立刻可知當 $z\to+\infty$ 時 (164) 式的極限爲零。這事實對於任何固定正數 r 皆成立。剩下來要證明的是

$$z^{n+p}\int_C e^{zt}t^{p-1}R_n(t)dt$$

的極限爲零,其中積分道路 C 是以原點爲中心,半徑等於 r 的圓周。假設 r 甚小,使關係 $r<\frac{1}{2}|\beta|$ 成立。那末在圓周 $|t|=r$ 上我們就可利用

展開式(156)。

由勾犀不等式，對展開式的係數 d_k 有如下的估計：

$$|d_k|<\frac{m_2}{(|\beta|-\varepsilon)^k},$$

其中 m_2 爲一正數，而 $|\beta|-\varepsilon$ 可設等於 $\rho=\frac{1}{2}|\beta|$。其次，

$$R_n(t)=d_{n+1}t^{n+1}+d_{n+2}t^{n+2}+\cdots$$

由上面的不等式得

$$|d_k|<m_2\left(\frac{1}{2}|\beta|\right)^{-k};\quad |t|=r<\frac{1}{2}|\beta|$$

從而

$$(166)\quad |R_n(t)|\leqslant|d_{n+1}||t|^{n+1}+|d_{n+2}||t|^{n+2}+\cdots<\frac{m_2|t|^{n+1}}{\rho^{n+1}(1-\theta)},$$

其中

$$\theta=\frac{r}{\rho}<1。$$

這個 $R_n(t)$ 的估計當 $|t|<r$ 時當然也成立，卽當 t 在 C 的內部時也成立。再藉變換 $zt=-\tau$ 引進另一積分變數 τ 以代 t，卽得

$$(167)\quad z^{n+p}\int_C e^{zt}t^{p-1}R_n(t)dt=(-1)^p z^n\int_{C'}e^{-\tau}\tau^{p-1}R_n\left(-\frac{\tau}{z}\right)d\tau,$$

其中積分道路 C' 是以原點爲中心，半徑等於 rz 的圓周。由勾犀定理我們可以將這線路變形而取從實軸上的點 rz 出發，環繞原點一週的任何位於 C' 內部的閉線路做積分線路。這時 t 平面中和他對應的線路必位於 C 的內部，故(166)式的估計成立。例如，可取如下的道路 C'' 爲積分道路：實軸上從 rz 到 c 點的線段，c 位於原點的右方，中心在原點而半徑等於 c 的圓周，然後又是實軸上的線段 (c, rz)，我們取 c 爲一固定的，和 z 無關的正數。先假設 p 爲實數。利用不等式(166)估計(167)式，可得：

$$\left|(-1)^p z^n\int_{C''}e^{-\tau}\tau^{p-1}R_n\left(-\frac{\tau}{z}\right)d\tau\right|<\frac{1}{z}\int_{C''}\frac{m_2|\tau|^{n+p}}{\rho^{n+1}(1-\theta)}|e^{-\tau}|ds,$$

其中 ds 爲線路的弧的微分。現在證明當 z 無限增大時，上式右邊的積分爲有界。實際上，在半徑爲 c 的圓周上的積分根本與 z 無關。再看沿着線段 (c, rz) 的積分，即

$$\frac{m_2}{\rho^{n+1}(1-\theta)}\int_0^{rz} e^{-\tau}\tau^{n+p}d\tau。$$

當 z 無限增加時上式中的積分趨於有限極限值：

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau}\tau^{n+p}d\tau,$$

於此被積分函數中的因子 $e^{-\tau}$ 保證了這廣義積分的存在。這樣，當 p 爲實數時我們已證明了所要的結果。對於複數 $p=p_1+ip_2$ 我們只要利用通常估計複數乘冪的方法，即

$$\tau^p = e^{(p_1+ip_2)\lg\tau} = e^{(p_1+ip_2)(\lg|\tau|+i\arg\tau)},$$

從而
$$|\tau^p| = |\tau|^{p_1}e^{-p_2\arg\tau}。$$

這樣，我們就可肯定當 $z>0$ 時級數 (163) 是函數 $e^{-\alpha_1 z}z^p w_1(z)$ 的漸近展開式：

$$(168)\qquad e^{-\alpha_1 z}z^p w_1(z) \sim e^{-\pi p i}(e^{2\pi p i}-1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(p+k)d_k}{z^k},$$

其中

$$(169)\qquad d_k = (\alpha_1-\alpha_2)^{q-1-k}\frac{(q-1)(q-2)\cdots(q-k)}{k!},\quad [d_0=(\alpha_1-\alpha_2)^{q-1}]$$

$$[-\pi<\arg(\alpha_1-\alpha_2)<+\pi]。$$

當 (168) 式中 p 爲整數的情形我們不擬再加研究。

完全相似的，對 (151) 式的第二個解可得如下的漸近展開式：

$$(170)\qquad e^{-\alpha_2 z}z^q w_2(z) \sim e^{-\pi q i}(e^{2\pi q i}-1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(q+k)d'_k}{z^k},$$

其中

$$(171)\quad d'_k = (\alpha_2-\alpha_1)^{p-1-k}\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-k)}{k!},\quad [d'_0=(\alpha_2-\alpha_1)^{p-1}]$$

$$[-\pi<\arg(\alpha_2-\alpha_1)<+\pi]，$$

對於 z^p 和 z^q 應設當 $z>0$ 時 $\arg z=0$。

110．不同結果的比較　回憶我們在[105]中曾做出一個形式上滿足方程(113)的級數：

(172)
$$e^{\alpha z}z^{p}\left(c_0+c_1\frac{1}{z}+\cdots\right)。$$

將這結果和(168)式中的漸近展開式比較，即和

(173)
$$e^{\alpha_1 z}z^{-p}e^{-\pi p i}(e^{2\pi p i}-1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(p+k)d_k}{z^k}$$

比較，我們要證明這兩個式子除一常數因子外是全同的，這任意常數因子即(172)式中的 c_0。

(168)式中的 $w_1(z)$ 是方程(134)的解，比較(134)式和(113)式，我們知道首先應有 $a_k=b_k=0$ 當 $k\geqslant 2$。(172)式和(173)式中的指數函數和冪函數因子是全同的，因為決定 α_1 的方程(139)與方程(115)全同，又由(142)式 $p=-\rho_1$，而這 ρ_1 就是當 $\alpha=\alpha_1$ 時由(119)式所決定的 ρ 的數值。剩下來要證明(172)和(173)中兩級數全同，為此，祇須證明這兩級數中的係數滿足同一個關係式，並由這關係式決定。

(172)式中的級數是方程(120)當 $a_k=b_k=0$，$k\geqslant 2$ 時的形式上的解，這方程就是：

(174)
$$u''+\left(2\alpha_1+a_0+\frac{2\rho_1+a_1}{z}\right)u'+\frac{\rho_1^2+(a_1-1)\rho_1}{z^2}u=0。$$

由方程(115)知

$$\alpha_1+\alpha_2=-a_0;\ 2\alpha_1+a_0=\alpha_1-\alpha_2;\ 2\alpha_2+a_0=\alpha_2-\alpha_1,$$

因此

$$\rho_1=-\frac{\alpha_1 a_1+b_1}{2\alpha_1+a_0}=\frac{\alpha_1 a_1+b_1}{\alpha_2-\alpha_1};\quad \rho_2=-\frac{\alpha_2 a_1+b_1}{2\alpha_2+a_0}=\frac{\alpha_2 a_1+b_1}{\alpha_1-\alpha_2}.$$

從而

(175)
$$\rho_1+a_1=-\rho_2;\quad \rho_1^2+(a_1-1)\rho_1=-\rho_1\rho_2-\rho_1。$$

方程(174)具(124)的形式，故係數 c_k 之間存在如下的關係：

$$[n(n+1)-n(2\rho_1+a_1)+\rho_1^2+(a_1-1)\rho_1]c_n=(n+1)(2\alpha_1+a_1)c_{n+1},$$

由 $\alpha_1+\alpha_2=-a_0$ 及(175)式得:

(176) $$[n(n+1)-n(\rho_1-\rho_2)-\rho_1\rho_2-\rho_1]c_n=(n+1)(\alpha_1-\alpha_2)c_{n+1}\text{。}$$

以 c_n 記(173)式中無窮級數的係數:

$$c_n=(-1)^n d_n p(p+1)\cdots(p+n-1)\Gamma(p)=(-1)^n d_n\Gamma(p+n),$$

由此 $$\frac{c_{n+1}}{c_n}=-\frac{d_{n+1}(p+n)}{d_n},$$

由(169)式得: $$\frac{c_{n+1}}{c_n}=-\frac{(q-n-1)(p+n)}{(n+1)(\alpha_1-\alpha_2)},$$

或 $$(n+1-q)(n+p)c_n=(n+1)(\alpha_1-\alpha_2)c_{n+1}\text{。}$$

由 $p=-\rho_1$ 和 $q=-\rho_2$ 知道上式和(176)式全同。這樣,我們看到:用[105]中的方法做出來的方程(134)的形式上的解是(151)式中的解的漸近展開式(當 $z\to+\infty$),除了一個常數因子以外。

111．貝塞爾方程　現在我們要將上節的定理應用於貝塞爾方程[II,48]:

(177) $$z^2w''+zw'+(z^2-n^2)w=0\text{。}$$

由下式引進另一未知函數 u 以代 w:

$$w=z^n u,$$

則方程(177)變爲:

(178) $$zu''+(2n+1)u'+zu=0,$$

而這就是我們在以前幾節中討論過的那種類型的方程,現在和(113)比較,知道:

$$a_0=0;\ a_1=2n+1;\ b_0=1;\ b_1=0\text{。}$$

二次方程(139)成爲 $z^2+1=0$, 故

$$\alpha_1=i;\ \alpha_2=-i\text{。}$$

和(141)式一樣,有:

$$p=\frac{2n+1}{2};\ q=\frac{2n+1}{2}\text{。}$$

最後,(151)式的解在目前成爲:

$$(179)\qquad u_1=\int_{L_1'}(z'^2+1)^{\frac{2n-1}{2}}e^{zz'}\,dz';\quad u_2=\int_{L_2'}(z'^2+1)^{\frac{2n-1}{2}}e^{zz'}\,dz',$$

其中線路 L_1' 和 L_2' 從$(-\infty)$出發分別環繞 $z'=i$ 和 $z'=-i$ 一週後重又回到$(-\infty)$。

當 $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon<\arg z<\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ 時這兩解由(179)式可決定。依照[108]中所示的條件,$\arg(z'+i)=0$ 當 $z'+i>0$, $\arg(z'-i)=0$ 當 $z'-i>0$。由此立刻得出

$\arg(z'^2+1)=\arg(z'+i)+\arg(z'-i)=0$ 當 z' 爲實數。

對(179)式中的第一個解,按照(168),我們有:

$$e^{-iz}z^{n+\frac{1}{2}}u_1\sim e^{-\pi(n+\frac{1}{2})i}[e^{\pi(2n+1)i}-1]\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k\right)d_k}{z^k}.$$

記住 $$e^{\pi(2n+1)i}-1=-(1+e^{2\pi ni})$$

以及(157)式 $$d_k=(2i)^{n-\frac{1}{2}-k}\binom{q-1}{k}=(2i)^{n-\frac{1}{2}-k}\binom{n-\frac{1}{2}}{k}$$

$$\left(-\pi<\arg 2i<\pi;\ 或\ \arg 2i=\frac{\pi}{2}\right),$$

卽 $$d_k=2^{n-\frac{1}{2}-k}e^{\frac{\pi}{2}(n-\frac{1}{2})i}i^{-k}\binom{n-\frac{1}{2}}{k},$$

卽得如下的漸近展開式:

$$(180)\qquad e^{-iz}z^{n+\frac{1}{2}}u_1\sim e^{-\frac{\pi}{2}(n-\frac{1}{2})i}(1+e^{2\pi ni})2^{n-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-\frac{1}{2}}{k}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{i}{2z}\right)^k.$$

完全類似的計算,對於(179)式的第二個解可得:

$$(181)\qquad e^{iz}z^{n+\frac{1}{2}}u_2\sim e^{-\frac{3\pi}{2}ni+\frac{2\pi}{4}i}(1+e^{2\pi ni})2^{n-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-\frac{1}{2}}{k}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{-i}{2z}\right)^k,$$

這式和上式不同的地方祇在於係數 d'_k：

$$d'_k=(-2i)^{n-\frac{1}{2}-k}\binom{n-\frac{1}{2}}{k}\quad\left(\arg(-2i)=-\frac{\pi}{2}\right)。$$

於此，記號$\binom{a}{k}$對整數 $k\geqslant 0$ 的定義如下：

$$\binom{a}{k}=\frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!},\quad \binom{a}{0}=1。$$

回憶方程(178)的正則解(在原點)可用(153)式來表示，祇是其中的 w 應改為 u，我們再引進另一解 u_2^* 以代 u_2：

$$u_2^*=e^{\rho 2\pi i}u_2=e^{(2n+1)\pi i}u_2。$$

對於 u_2^* 我們有下面的漸近表示式：

$$\text{(182)}\qquad e^{iz}z^{n+\frac{1}{2}}u_2^*\sim e^{\frac{\pi}{2}(n-\frac{1}{2})i}(1+e^{2\pi ni})2^{n-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-\frac{1}{2}}{k}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{-i}{2z}\right)^k。$$

對應的方程(177)的兩解可由 $w=z^n u$ 的關係得到。

有時我們也將(179)的兩解寫成另外的形式，即藉變換 $z'=i\tau=e^{\frac{\pi}{2}i}\tau$ 引進另一積分變數 τ 以代 z'，這變換實際上就是將 z' 平面轉一角度 $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$：

$$\text{(183)}\qquad u_1=i\int_{\lambda_1}(1-\tau^2)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau;\ u_2=i\int_{\lambda_2}(1-\tau^2)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau,$$

其中 λ_1 和 λ_2 是從 $\tau=+i\infty$ 出發，分別環繞 $\tau=+1$ 和 $\tau=-1$ 各一週的閉線路(圖 70)，又 $\arg(1-\tau^2)=0$ 當 τ 為純虛數，即當 z' 為實數時；或是同樣的，$\arg(1-\tau^2)=\pi$ 當 $\tau>1$。置 $1-\tau^2=e^{\pi i}(\tau^2-1)$，則由(183)式得：

$$\text{(184)}\qquad\begin{cases}u_1=e^{\pi(n-\frac{1}{2})i}\,i\int_{\lambda_1}(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau\\ u_2=e^{\pi(n-\frac{1}{2})i}\,i\int_{\lambda_2}(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau,\end{cases}$$



圖 70

其中

(185) $$\arg(\tau^2-1)=0 \text{ 當 } \tau>1。$$

對應的方程(177)的解是：

(186) $$\begin{cases} w_1=e^{\pi(n-\frac{1}{2})i}\, iz^n\int_{\lambda_1}(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau \\ w_2=e^{\pi(n-\frac{1}{2})i}\, iz^n\int_{\lambda_2}(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau, \end{cases}$$

當 z 取甚大的正數值時這兩解的漸近表示式可由以前的(180)和(131)兩式的右邊乘上 z^n 而得到。現在引進 $w_2^*=e^{(2n+1)\pi i}w_2$ 以代 w_2，則

(187) $$w_2^*=e^{\pi(3n+\frac{1}{2})i}\, iz^n\int_{\lambda_2}(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau。$$

兩解之差 $u_1-u_2^*$ 就是方程(178)的在原點 $z=0$ 為正則的解，同樣，$w_1-w_2^*$ 是貝塞爾方程的解，他在原點附近可展開為

$$z^n\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k$$

形式的級數。

我們在[II, 48]中早已知道貝塞爾方程的這樣的解係由下面的級數決定：

$$Cz^n\left[1-\frac{z^2}{2(2n+2)}+\frac{z^4}{2\cdot 4\cdot(2n+2)\cdot(2n+4)}-\cdots\right]。$$

若 n 為正整數或零，則如我們早已指出過的一樣，可取常數因子 C 為 $\frac{1}{2^n n!}$，其中 $0!=1$，對如此選取的常數因子我們得到了第一類的貝塞爾函數：

$$J_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k},$$

或利用函數 $\Gamma(z)$，

$$J_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}。$$

若 n 非整數，則取常數因子 C 為

$$C=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)},$$

這樣得到的解是

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)\Gamma(n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}$$

或由函數 $\Gamma(z)$ 的基本性質，得：

$$J_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}。\tag{188}$$

這樣，對於任意的足號 n 貝塞爾函數都已定義好了。差 $w_1-w_2^*$ 並不就等於貝塞爾函數，而是和貝塞爾函數相差一個常數乘數，我們現在就要來決定這個乘數。為此，我們應取兩個和(186)中兩解相差一個常數乘數的解，使得他們的差剛好等於貝塞爾函數 $J_n(z)$。給第二個解加一負號，我們現在要找一個常數 a，使得下列兩解之和的一半等於貝塞爾函數：

$$\left\{\begin{aligned}H_n^{(1)}(z)&=bw_1=az^n\int_{\lambda_1}(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau\\H_n^{(2)}(z)&=-bw_2^*=-ae^{(2n+1)\pi i}z^n\int_{\lambda_2}(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau。\end{aligned}\right.\tag{189}$$

$$\left(a=be^{\pi(n-\frac{1}{2})i}\right)$$

在所有以上的計算中我們假設了$\left(n-\frac{1}{2}\right)$不是正整數或零。後面這種情形當在詳細研究貝塞爾函數的時候再去討論。

112. 漢開爾函數 對於滿足上節條件的常數 a，公式(189)決定方程(177)的兩個解，稱為漢開爾函數，記法亦如(189)中所記一樣。如[108]中所知，將(189)中的兩解相加可以得到一個沿積分路線 C 的積分，這路線呈8字形，如71圖所示。實際上，69圖當 $\alpha_1=i$ 和 $\alpha_2=-i$ 時繞着原點順時針方向轉一直角即得71圖。

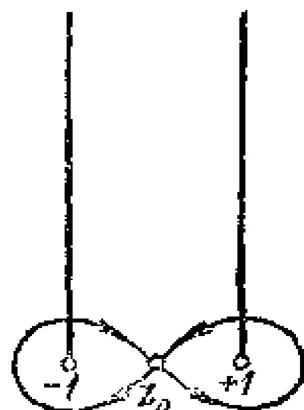


圖 71

因(189)中兩函數之和的一半應該等於貝塞爾函數(188)，故得：

$$(190)\qquad \frac{a}{2}z^n\int_C(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}\,d\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}.$$

兩邊約去 z^n 以後再置 $z=0$，即得決定 a 的方程：

$$(191)\qquad \frac{1}{2}a\int_C(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}d\tau=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)},$$

剩下來祇要計算等式左邊的積分。假設 n 是實數，且 $n-\frac{1}{2}>-1$，和 [108] 中一樣，我們可以將 C 上的積分改爲沿二重線段 $(-1,+1)$ 上的積分，但從 (-1) 到 $(+1)$ 應沿這線段的下岸，從 $(+1)$ 到 (-1) 應沿這線段的上岸。如前，當 $\tau>1$ 時 $\arg(\tau^2-1)=0$，由此可知在線段 $(-1,+1)$ 的上岸 $\arg(\tau^2-1)=\pi$，在這線段的下岸 $\arg(\tau^2-1)=-\pi$，即

$$(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}=e^{i\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}(1-\tau^2)^{n-\frac{1}{2}}\qquad(\text{在上岸})$$

$$(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}=e^{-i\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}(1-\tau^2)^{n-\frac{1}{2}}\qquad(\text{在下岸})$$

最後將兩積分相加，得：

$$\int_C(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}d\tau=-2i\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\int_{-1}^{+1}(1-\tau^2)^{n-\frac{1}{2}}d\tau,$$

其中
$$(1-\tau^2)^{n-\frac{1}{2}}=e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)\lg(1-\tau^2)}\qquad(1-\tau^2>0).$$

因被積分函數是偶函數，故有：

$$\int_C(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}d\tau=-4i\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\int_0^1(1-\tau^2)^{n-\frac{1}{2}}d\tau,$$

或由 $\tau^2=x$ 引進積分變數 x 以代 τ：

$$\int_C(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}d\tau=-2i\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\int_0^1x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{n-\frac{1}{2}}dx,$$

但是我們知道

$$\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

因此等式(191)中的積分的值爲：

$$\int_C (\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}} d\tau = -2i\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} =$$

$$= 2i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}。$$

但是我們知道：

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad 和 \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

從而

$$(192) \qquad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)},$$

最後

$$\int_C (\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}} d\tau = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}} i}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\Gamma(n+1)}。$$

這公式是在 n 爲實數及 $n-\frac{1}{2}>-1$ 的假設之下導出的。但因等式兩邊都是 n 的解析函數，故可肯定這公式對於任何的 n 都成立。這樣，由(191)式卽可決定常數 a 的數值爲：

$$a = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{2^n \pi^{\frac{3}{2}} i}。$$

將這數值代入(189)式，卽得漢開爾函數的表示式：

$$(193) \quad \begin{cases} H_n^{(1)}(z) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\pi^{\frac{3}{2}} i}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n \displaystyle\int_{\lambda_1} (\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}} e^{iz\tau} d\tau \\ H_n^{(2)}(z) = -\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\pi^{\frac{3}{2}} i} e^{(2n+1)\pi i}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n \displaystyle\int_{\lambda_2} (\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}} e^{iz\tau} d\tau。 \end{cases}$$

在兩積分中均設當 $\tau>1$ 時 $\arg(\tau^2-1)=0$。如果在第二個積分中

設 $\arg(\tau^2-1)=2\pi$ 當 $\tau>1$，則可寫:

$$(193_1)\quad \begin{cases} H_n^{(1)}(z)=-\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}i}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n\displaystyle\int_{\lambda_1}(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau \\ H_n^{(2)}(z)=-\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}i}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n\displaystyle\int_{\lambda_2}(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau。\end{cases}$$

如果 z 的實數部分大於零，則當 $\tau\to+i\infty$ 時 $iz\tau\to(-\infty)$，因此(193)式在虛軸的右邊定義了漢開爾函數。記住我們假設 $n-\frac{1}{2}$ 不等於負整數。

(193)式中的漢開爾函數 $H_n^{(1)}(z)$ 和(186)式中的第一個函數相差一個乘數:

$$-\frac{e^{-\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)i}\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{2^n\pi^{\frac{3}{2}}}。$$

利用(180)的漸近展開式和 $w=z^nu$ 的關係卽得:

$$e^{-iz}z^{\frac{1}{2}}H_n^{(1)}(z)\sim-\frac{2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi}{2}ni+\frac{3\pi}{4}i}\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{\pi^{\frac{3}{2}}}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n-\frac{1}{2}}{k}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{i}{2z}\right)^k$$

或由(192)的關係:

$$(194)\qquad e^{-iz}z^{\frac{1}{2}}H_n^{(1)}(z)\sim\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-i\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-\frac{1}{2}}{k}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{i}{2z}\right)^k。$$

上式也可寫成:

$$(195)\qquad H_n^{(1)}(z)\sim\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{i\left(z-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-\frac{1}{2}}{k}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{i}{2z}\right)^k。$$

同樣可得：

$$(196)\qquad H_n^{(2)}(z)\sim\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-i\left(z-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-\frac{1}{2}}{k}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{-i}{2z}\right)^k。$$

上兩式又可寫成：

$$(195_1)\quad H_n^{(1)}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{i\left(z-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n-\frac{1}{2}}{k}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{i}{2z}\right)^k+O(|z|^{-p})\right]。$$

$$(196_1)\quad H_n^{(2)}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-i\left(z-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n-\frac{1}{2}}{k}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k\right)\left(-\frac{i}{2z}\right)^k+O(|z|^{-p})\right],$$

其中 $O(|z|^{-k})$ 表示 z 的這樣的函數，他和 $|z|^k$ 的乘積當 $|z|\to\infty$ 時仍爲有界。在 $\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}$ 中應設 $\arg z=0$，卽取正根。

上列漸近公式祇是對於半射線 $z>0$ 證明了的。可以證明他們在一個扇形區域中也成立，卽(195_1)式在扇形

$$-\pi+\varepsilon<\arg z<2\pi-\varepsilon$$

中成立，(196_1)式在扇形

$$-2\pi+\varepsilon<\arg z<\pi-\varepsilon$$

中成立，其中 ε 是任何的小的正數。

113. 貝塞爾函數 將上節中求到的 a 的數值代入(190)式，即得貝塞爾函數 $J_n(z)$ 的積分表示式：

$$J_n(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{2\pi^{\frac{3}{2}}i}\left(\frac{z}{2}\right)^n\int_C(\tau^2-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau\text{。}\tag{197}$$

和(193)式一樣，這公式對於所有不等於 $m+\frac{1}{2}$ 的 n 都有意義，其中 m 是正整數或零。

如果 n 的實數部分大於$\left(-\frac{1}{2}\right)$，則可將上式中的積分化爲沿二重線段$(-1,+1)$的積分，和從前一樣的論斷可得：

$$J_n(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^n\int_{-1}^{+1}(1-\tau^2)^{n-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}d\tau\tag{198}$$

$$\left(R[n]>-\frac{1}{2}\right)\text{。}$$

若置 $\tau=\sin\varphi$，則得：

$$J_n(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\varphi[\cos(z\sin\varphi)+$$

$$+i\sin(z\sin\varphi)]d\varphi,$$

因被積分函數中 i 的係數是 φ 的奇函數，故

$$J_n(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\varphi\cdot\cos(z\sin\varphi)d\varphi\tag{199}$$

$$\left(R[n]>-\frac{1}{2}\right),$$

上式又可寫成：

$$J_n(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\varphi\cos(z\sin\varphi)d\varphi\tag{200}$$

$$\left(R[n]>-\frac{1}{2}\right)\text{。}$$

取漸近展開式(195)和(196)的和的一半,卽得貝塞爾函數的漸近表示式。

爲簡單起見我們只看半射線 $z>0$。這時 $e^{\pm iz}$ 的絕對值等於1。取 (195_1)和(196_1)的和的一半,並注意

$$\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{\pm i\left(z-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}O(z^{-p})=O(z^{-p-\frac{1}{2}}), \qquad (z>0)$$

卽得:

$$(201)\qquad J_n(z)=\frac{1}{2}[H_n^{(1)}(z)+H_n^{(2)}(z)]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n-\frac{1}{2}}{k}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k\right)}{(2z)^k}\times$$

$$\times\begin{Bmatrix}(-1)^{\frac{k}{2}}\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\\ (-1)^{\frac{k+1}{2}}\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\end{Bmatrix}+O(z^{-p-\frac{1}{2}}),$$

當 k 爲偶數時取花括弧中的第一行,當 k 爲奇數時取第二行。

只取(195_1)和(196_1)的漸近表示式中第一項,得:

$$(202)\qquad \begin{cases}H_n^{(1)}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}e^{i\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}[1+O(|z|^{-1})]\\ H_n^{(2)}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-i\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}[1+O(|z|^{-1})]\end{cases}$$

而對貝塞爾函數則有

$$(203)\qquad J_n(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(z^{-\frac{3}{2}}) \qquad (z>0)。$$

漢開爾函數和貝塞爾函數的漸近表示式間的差別在有關包含無限遠點的無限區域的理論物理學問題中佔有非常的重要性,在以後還要談到。

114. 在更一般場合中的拉普拉斯變換　拉普拉斯變換可以用來解比方程(134)更一般的微分方程。試以係數為 z 的二次多項式的微分方程為例：

$$(a_0z^2+a_1z+a_2)w''+(b_0z^2+b_1z+b_2)w'+(C_0z^2+C_1z+C_2)w=0, \tag{204}$$

其中 $a_0\neq0$。若以 w'' 的係數除這方程，則 w' 和 w 的係數在 $z=\infty$ 的鄰域中有和方程(113)同樣的形式。現在要找方程(204)的具下面的形式的解：

$$w(z)=\int_l v(z')e^{zz'}\,dz'。 \tag{205}$$

和[107]中一樣的論斷，知道 $v(z')$ 應滿足一個二階方程：

$$(a_0z'^2+b_0z'+C_0)\frac{d^2v}{dz'^2}+p(z')\frac{dv}{dz'}+q(z')v=0, \tag{206}$$

其中 $p(z')$ 和 $q(z')$ 是不高於二次的多項式。作二次方程

$$a_0\alpha^2+b_0\alpha+C_0=0 \tag{207}$$

並設這方程有兩個不同的根 $\alpha=\alpha_1$ 和 $\alpha=\alpha_2$。方程(206)以 $z'=\alpha_1$ 和 $z'=\alpha_2$ 為正則奇異點。在其中每一點的判定方程必有一根等於零。設以 $(p-1)$ 和 $(q-1)$ 分別表示這兩判定方程的第二個根，且設 p 和 q 不是整數。在每一奇異點有一正則解，而另一解則為：

$$v_1(z')=(z'-\alpha_1)^{p-1}\varphi_1(z');\quad v_2(z')=(z'-\alpha_2)^{q-1}\varphi_2(z'), \tag{208}$$

其中 $\varphi_k(z')$ 在 $z'=\alpha_k$ $(k=1,2)$ 為正則。(205)式中的線路 l 應如此取法，使得行分部積分後所添加的各項沿 l 所得的改變量為零。如果

$$\left[\frac{d^n(vz'^m)}{dz'^n}e^{zz'}\right]_l=0 \qquad \begin{pmatrix}n=0,1\\ m=0,1,2\end{pmatrix} \tag{209}$$

的話，那末這目的顯然就可以達到了。現在取 $v(z')$ 為 $v_k(z')$，l 為[108]中的線路 l'_k。則和[108]一樣，可得方程(204)的兩個線性獨立的解：

$$w_k(z)=\int_{l'_k} v_k(z')e^{zz'}\,dz' \qquad (z>0)\quad (k=1,2)$$

當 $z\to+\infty$ 時這兩解有如下的漸近展開式：

$$w_1(z)=e^{\alpha_1 z}z^{-p}\left(c_0+\frac{c_1}{z}+\cdots\right)$$

$$w_2(z)=e^{\alpha_2 z}z^{-q}\left(d_0+\frac{d_1}{z}+\cdots\right),$$

除了一個常數因子外這結果和[109]中所得到的展開式全同。拉普拉斯變換還可以用來解更一般的，係數為任意 m 次多項式的微分方程。這時 $v(z')$ 應滿足一個 m 階微分方程，其係數為二次多項式。如前，這方程在奇異點 $z'=\alpha_1$ 和 $z'=\alpha_2$ $\left(\dfrac{d^m v}{dz'^m}\text{ 的係數的零點}\right)$ 有唯一的形式如(208)的解。剩下來是在奇異點為正則的解。其餘的話如前一樣可推出來，不多說了。

115. 廣義拉蓋爾多項式　關於一個電子在庫倫電場中的狀況的研究以及其他近代物理學上的問題常導出如下形式的二階線性微分

方程：

$$w''+\frac{1}{z}w'+\left(2\varepsilon+\frac{2}{z}-\frac{s^2}{4z^2}\right)w=0。\tag{210}$$

這裏 s 是已給非負實數，ε 是實參數。問題是要決定參數 ε 的值，使得方程(210)有在正實軸 $0\leqslant z<+\infty$ 上爲有界的解。

首先考察參數 ε 爲負的情形，這時可藉

$$x=z\sqrt{-8\varepsilon}\tag{211}$$

引進另一自變數 x 以代 z，又可藉

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon}}\tag{212}$$

引進另一正參數 λ 以代 ε。易見經過這些變換以後，方程(210)變爲：

$$x\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{dw}{dx}+\left(-\frac{x}{4}+\lambda-\frac{s^2}{4x}\right)w=0。\tag{213}$$

$x=0$ 是這方程的正則奇異點，在這點的判定方程是：

$$\sigma(\sigma-1)+\sigma-\frac{s^2}{4}=0。$$

這方程的兩根是 $\sigma=\pm\frac{s}{2}$。方程的解應在原點爲有界，故應取正根 $\sigma=\frac{s}{2}$，卽方程的解中有一因子爲 $x^{\frac{s}{2}}$，而這解在原點附近應可展開爲：

$$w=x^{\frac{s}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k \qquad (b_0\neq0)。\tag{214}$$

依照[105]，在無限遠點的鄰域中我們將企圖使如下的級數在形式上滿足方程(213)：

$$e^{\alpha x}x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{x^k} \qquad (c_0\neq0)。$$

這時 α 應滿足二次方程

$$\alpha^2-\frac{1}{4}=0。$$

所以得到兩個數值 $\alpha=\pm\frac{1}{2}$，由(119)式知對應的常數 ρ 的數值爲：

$$\rho_1=-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right);\quad \rho_2=\lambda-\frac{1}{2}。$$

由假設，方程的解應在無限遠點爲有界，故應取和 $\alpha=-\frac{1}{2}$ 對應的解，即這解在無限遠點應有如下的漸近表示式：

(215) $$e^{-\frac{x}{2}}x^{\lambda-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{x^k}。$$

這樣，問題就歸結到：決定 λ 的數值，使得形式如(214)的解沿線段$(0,+\infty)$解析延拓到無限遠點時有形式如(215)的表示式。

以上的考慮自然地使我們引進另一未知函數 y 以代 w：

(216) $$w=e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{s}{2}}y。$$

將上式代入(212)，得到 y 所應滿足的方程：

(217) $$x\frac{d^2y}{dx^2}+(s+1-x)\frac{dy}{dx}+\left(\lambda-\frac{s+1}{2}\right)y=0。$$

這方程和我們從前研究過的方程(134)形式相同。記住前面說過的話，我們知道現在應該找一個方程(217)的解，他在原點爲正則而在無限遠點與 $x^{\lambda-\frac{s+1}{2}}$ 同階。

置

(218) $$\frac{s+1}{2}-\lambda=p,$$

則方程(217)變爲：

(219) $$x\frac{d^2y}{dx^2}+(s+1-x)\frac{dy}{dx}-py=0。$$

我們要找這方程的解，他在原點爲正則，且具普通冪級數的形式：

$$y=1+b_1x+b_2x^2+\cdots$$

將 y 代入方程(219)，利用通常的未定係數法，可以得到一個和超越幾何級數非常類似的解，即若記

(220) $$F(\alpha,\gamma;x)=1+\frac{\alpha}{\gamma}\frac{x}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!}+\cdots,$$

則在原點爲正則的方程(219)的解就是

$$(221) \qquad y=CF(p,\,s+1;\,x),$$

其中 C 爲任意常數。注意：由方程(219)的形式，或用達郎倍爾判定法易知級數(220)對任何 x 爲收斂。顯然，當 α 等於零或負整數時級數(220)退化爲多項式，這時我們的解就可能滿足在無限遠點的條件了。由(218)可得決定參數 λ 的方程：

$$\frac{s+1}{2}-\lambda_n=-n \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

從而

$$(222) \qquad \lambda_n=\frac{s+1}{2}+n \qquad (n=0,1,2,\cdots)。$$

對這樣的參數的值所求方程(219)的解是：

$$Q_n(x)=C_nF(-n,\,s+1;\,x)=C_n\left[1-\frac{n}{1!}\frac{x}{s+1}+\right.$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{(s+1)(s+2)}-\cdots+$$

$$\left.+(-1)^n\frac{x^n}{(s+1)(s+2)\cdots(s+n)}\right]。$$

要取消分母中所含的 s，可取常數

$$C_n=(s+1)(s+2)\cdots(s+n)=\frac{\Gamma(s+n+1)}{\Gamma(s+1)},$$

由此卽得方程(217)的解，他是 x 和 s 的多項式：

$$(223) \qquad Q_n^{(s)}(x)=\frac{\Gamma(s+n+1)}{\Gamma(s+1)}F(-n,\,s+1;\,x)$$

或

$$(224) \qquad Q_n^{(s)}(x)=(-1)^n\left[x^n-\frac{n}{1!}(s+n)x^{n-1}+\right.$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}(s+n)(s+n-1)x^{n-2}+\cdots+$$

$$\left.+(-1)^n(s+n)(s+n-1)\cdots(s+1)\right]。$$

這些多項式都稱爲廣義拉蓋爾多項式。我們以後還要更詳細地討

論他們。

可以證明：使得我們的問題有在 $x=0$ 和 $x=+\infty$ 滿足已給條件的解的所有參數 λ 的值都包含在(222)式之中。

利用和 [102] 中完全類似的方法我們可以給出廣義拉蓋爾多項式一個簡單的表示式。級數(220)是方程

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-x)\frac{dy}{dx}-\alpha y=0 \tag{225}$$

的解。

將級數(220)微分 m 次，得另一級數：

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+m-1)}F(\alpha+m,\gamma+m;x),$$

如果記 $F(\alpha,\gamma;x)=y_1$，則知 y_1 的 m 階導數

$$y_1^{(m)}=F^{(m)}(\alpha,\gamma;x) \tag{226}$$

是方程(225)的解，但其中 α 和 γ 應改爲$(\alpha+m)$和$(\gamma+m)$，卽：

$$x\frac{d^2y_1^{(m)}}{dx^2}+(\gamma+m-x)\frac{dy_1^{(m)}}{dx}-(\alpha+m)y_1^{(m)}=0,$$

以 $x^{\gamma+m-1}e^{-x}$ 乘這方程的兩邊，我們可以將他改寫成下面的形式[102]：

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\gamma+m}e^{-x}\frac{dy_1^{(m)}}{dx}\right]-(\alpha+m)x^{\gamma+m-1}e^{-x}y_1^{(m)}=0。$$

將這恆等式微分 m 次，得：

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left[x^{\gamma+m}e^{-x}\frac{dy_1^{(m)}}{dx}\right]=(\alpha+m)\frac{d^m}{dx^m}[x^{\gamma+m-1}e^{-x}y_1^{(m)}]。$$

以 $m=0,1,\cdots,k-1$ 代入，得到 k 個恆等式，邊邊相乘，再約去相同的因子，可得：

$$\frac{d^k}{dx^k}[x^{\gamma+k-1}e^{-x}y_1^{(k)}]=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)x^{\gamma-1}e^{-x}y_1。 \tag{227}$$

設 α 爲負整數，$\alpha=-k$，則(220)退化爲 k 次多項式，而 $y_1^{(k)}$ 則成爲常數

$$F^{(k)}(-k,\gamma;x)=\frac{-k(-k+1)(-k+2)\cdots(-k+k-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}=$$

$$=(-1)^k\frac{k!}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}。$$

這時(227)式變爲：

$$(-1)^k\frac{k!}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}\frac{d^k}{dx^k}(x^{\gamma+k-1}e^{-x})=$$

$$=(-1)^k k!\,x^{\gamma-1}e^{-x}F(-k,\gamma;x),$$

最後即得：

$$F(-k,\gamma;x)=\frac{x^{1-\gamma}e^x}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}\frac{d^k}{dx^k}(x^{\gamma+k-1}e^{-x})。\tag{228}$$

由(223)即得到廣義拉蓋爾多項式的另一簡單表示式 ($\gamma=s+1$; $k=n$)：

$$Q_n^{(s)}(x)=x^{-s}e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^{s+n}e^{-x})。\tag{229}$$

116. 參數的正值　現在我們考察方程(210)，當參數 s 取正值時。這時可藉公式

$$x_1=z\sqrt{8s}$$

引進新的自變數 x_1 以代 z，藉

$$\lambda_1=\frac{1}{\sqrt{2s}}$$

引進新的參數 λ_1 以代 s。

經過這些變換以後，方程(210)變爲：

$$x_1\frac{d^2w}{dx_1^2}+\frac{dw}{dx_1}+\left(\frac{x_1}{4}+\lambda_1-\frac{s^2}{4x_1}\right)w=0。\tag{230}$$

上式亦可由(213)經過如下的自變數和參數的變換而得到：

$$x=ix_1;\quad \lambda=-i\lambda_1。$$

因此現在我們再藉下式引進另一未知函數 y_1 以代 w：

$$w=e^{-\frac{ix_1}{2}}x_1^{\frac{s}{2}}y_1,\tag{231}$$

即得 y_1 所應滿足的方程：

$$(232)\qquad x_1\frac{d^2y_1}{dx_1^2}+(s+1-ix_1)\frac{dy_1}{dx_1}+\left[\lambda_1-\frac{i}{2}(s+1)\right]y_1=0。$$

將他和方程(134)比較，知道現在

$$a_0=-i;\ \ a_1=s+1;\ \ b_0=0;\ \ b_1=\lambda_1-\frac{i}{2}(s+1)。$$

α 的二次方程是：　　　$\alpha^2-i\alpha=0,$

故得兩根　　　　　　　$\alpha_1=0;\quad \alpha_2=i,$

而對應的 p 和 q 的數值[107]是：

$$p=\frac{b_1}{a_0}=\frac{1}{2}(s+1)+i\lambda_1;\ \ q=\frac{i(s+1)+\lambda_1-\frac{i}{2}(s+1)}{2i-i}$$
$$=\frac{1}{2}(s+1)-i\lambda_1。$$

這樣，我們就得到方程(232)的兩個解：

$$(233)\qquad \begin{aligned} y_1^{(1)}&=C_1\int_{l_1}z'^{\frac{1}{2}(s-1)+i\lambda_1}(z'-i)^{\frac{1}{2}(s-1)-i\lambda_1}e^{\alpha_1 z'}dz',\\ y_1^{(2)}&=C_2\int_{l_2}z'^{\frac{1}{2}(s-1)+i\lambda_1}(z'-i)^{\frac{1}{2}(s-1)-i\lambda_1}e^{\alpha_2 z'}dz',\end{aligned}$$

其中 l_1 和 l_2 是兩端在 $z'=-\infty$，分別環繞 $z'=0$ 和 $z'=i$ 一週的線路。由[109]中的公式，當正數 x_1 甚大時這兩解有如下的漸近展開式：

$$C_3x_1^{-\frac{1}{2}(s+1)-i\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{x_1^k},$$

$$C_4e^{ix_1}x_1^{-\frac{1}{2}(s+1)+i\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k'}{x_1^k},$$

其中 C_3 和 C_4 是常數。再利用(231)式立刻可知對應的方程(230)的兩解 w_1 和 w_2 當 $x_1\to+\infty$ 時趨於零爲極限。因此可知方程(230)的任一解都具此性質，特別，在 $x_1=0$ 鄰近可展開爲

$$w=x_1^{\frac{s}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx_1^k,\qquad (b_0\neq 0)$$

的解亦然，就是說，對於任何實數 λ_1 方程(230)必有一解，他在區間$(0, +\infty)$的兩端都等於零。

117. 高斯方程的退化　考察一般的係數爲一次多項式的微分方程：

$$(p_0t+p_1)\frac{d^2u}{dt^2}+(q_0t+q_1)\frac{du}{dt}+(r_0t+r_1)u=0, \tag{234}$$

於此設 $p_0\neq 0$。現在要證明這方程可以化成(225)的形式。引進新的自變數 $z=p_0t+p_1$ 以代 t。可將(234)式化爲(134)的形式：

$$z\frac{d^2u}{dz^2}+(a_0z+a_1)\frac{du}{dz}+(b_0z+b_1)u=0。 \tag{235}$$

若置 $u=e^{\alpha z}z^py$，並以另一變數 $x=kz$ 代 z，則對適當選取的常數 α, p 和 k，上式可化爲方程(225)。現在證明方程(225)亦可由高斯方程：

$$z(z-1)\frac{d^2y}{dz^2}+[-\gamma+(1+\alpha+\beta)z]\frac{dy}{dz}+\alpha\beta y=0$$

經過極限步驟而得到。引進另一變數 $x=\alpha z$ 以代 z，上式變爲：

$$x\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[-\gamma+x+\frac{(1+\beta)x}{\alpha}\right]\frac{dy}{dx}+\beta y=0,$$

在這方程中將 α 趨於無限，即得方程(225)。如我們所證，他和方程(234)間存在着簡單的變換關係。上述極限步驟的結果把高斯方程的兩個正則奇異點合併成爲一個在無限遠的非正則奇異點，剩下來祇有一個正則奇異點了。

和上列方程有直接關係的還有衞突克方程：

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{k}{z}+\frac{\frac{1}{4}-m^2}{z^2}\right)w=0。 \tag{236}$$

若藉變換 $w=z^{m+\frac{1}{2}}u$ 引進新的函數 u 以代 w，則得形式如(235)的方程：

$$z\frac{d^2u}{dz^2}+(1+2m)\frac{du}{dz}+\left(-\frac{1}{4}z+k\right)u=0。$$

作這方程的形式如(151)的解,得:

$$w=Cz^{m+\frac{1}{2}}\int_l\left(z'-\frac{1}{2}\right)^{m-\frac{1}{2}+k}\left(z'+\frac{1}{2}\right)^{m-\frac{1}{2}-k}e^{zz'}dz',$$

其中 l 是從$(-\infty)$出發環繞 $z'=-\frac{1}{2}$ 一週的閉線路。改換積分變數:

$$z'=-\frac{1}{2}-\frac{t}{z},$$

得 $$w=C_1e^{-\frac{1}{2}z}z^k\int_{l_0}(-t)^{m-\frac{1}{2}-k}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{m-\frac{1}{2}+k}e^{-t}dt,$$

其中 l_0 是從$(+\infty)$出發由正方向環繞 $t=0$ 一週的閉線路,並設 $t=-z$ 在這線路的外部。以一定的方法選取常數 C_1,即得衛突克函數:

(237)

$$w_{k,m}(z)=\frac{-1}{2\pi i}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)e^{-\frac{1}{2}z}z^k\int_{l_0}(-t)^{m-\frac{1}{2}-k}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{m-\frac{1}{2}+k}e^{-t}dt\text{。}$$

在這式子中我們假設 z 不是負數,$\arg z$ 取主值,$|\arg(-t)|\leqslant\pi$,又 $\arg\left(1+\frac{t}{z}\right)\to 0$ 當 $t\to 0$ 從 l_0 的內部。當 $k-\frac{1}{2}-m$ 爲負整數時(237)式失去意義。

但若$\left(k-\frac{1}{2}-m\right)$的實數部分不大於零,且$\left(k-\frac{1}{2}-m\right)$不是整數,則(237)式可以改變成爲:

$$(238)\qquad w_{k,m}(z)=\frac{e^{-\frac{1}{2}z}z^k}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+m\right)}\int_0^\infty t^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m}e^{-t}dt,$$

而這式子即使當$\left(k-\frac{1}{2}-m\right)$是負整數時亦可用來定義 $w_{k,m}(z)$。

利用[109]的結果容易寫出函數 $w_{k,m}(z)$的漸近展開式:

(238_1) $w_{k,m}(z)=e^{-\frac{1}{2}z}z^k\times$

$$\times\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[m^2-\left(k-\frac{3}{2}\right)^2\right]\cdots\left[m^2-\left(k-n+\frac{1}{2}\right)^2\right]}{n!\,z^n}\right\},$$

他在扇形區域 $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$ 中成立，其中 ε 爲任何正數。

若在方程(236)中同時以 $(-k)$ 代 k，$(-z)$ 代 z，則此方程不變，故知除(237)外方程(236)還有一解 $w_{-k,m}(-z)$。由漸近展開式(238_1)立刻可知這兩解是互爲線性獨立的。

118. 係數爲週期函數的微分方程 現在要考察係數是自變數的週期函數的二階線性微分方程。這類方程的理論大體上和前面研究過的係數爲解析函數的微分方程的理論相類似。以下我們假設方程的係數和自變數都是實數。設有方程

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0, \tag{239}$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是實變數 x 的連續實函數，具有實週期 ω，即

$$p(x+\omega)=p(x); \quad q(x+\omega)=q(x)。 \tag{240}$$

係數的連續性保證了下面的事實：由某些初始條件決定的方程(239)的任一解對於所有 x 的實數值皆存在。設 $y_1(x)$ 是方程的解，則

$$y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)=0。$$

改 x 爲 $x+\omega$，得：

$$y_1''(x+\omega)+p(x+\omega)y_1'(x+\omega)+q(x+\omega)y_1(x+\omega)=0,$$

由(240)式有

$$y_1''(x+\omega)+p(x)y_1'(x+\omega)+q(x)y_1(x+\omega)=0。$$

由此立刻知道 $y_1(x+\omega)$ 也是方程的解。現在任取兩個線性獨立的解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$。則函數 $y_1(x+\omega)$ 和 $y_2(x+\omega)$ 也應是方程(239)的解，因此他們應該可以表示爲 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的線性結合，即

$$\begin{cases} y_1(x+\omega)=a_{11}y_1(x)+a_{12}y_2(x), \\ y_2(x+\omega)=a_{21}y_1(x)+a_{22}y_2(x), \end{cases} \tag{241}$$

其中 a_{ik} 是常數。這樣，我們看到：若取方程(239)的兩個線性獨立的解，那末給自變數添加一個週期就相當於使他們經過一個線性變換(241)。這正和觀察具解析係數的方程時我們所看到的情形完全類似，繞奇異

點一週以後線性獨立的解就受到一個線性變換,我們還可以繼續說下去,好像在[97]中一樣。現在祇列舉一些結果。常數 a_{ik} 繫於線性獨立解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的選取,但在 ρ 的二次方程

$$(242)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\rho, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22}-\rho \end{vmatrix}=0$$

中諸係數卻是唯一的,與解的選取無關。若方程(242)有兩個不同的根 ρ_1 和 ρ_2,則存在兩個線性獨立的解 $\eta_1(x)$ 和 $\eta_2(x)$,滿足下面的關係:

$$(243)\qquad \eta_1(x+\omega)=\rho_1\eta_1(x);\quad \eta_2(x+\omega)=\rho_2\eta_2(x)。$$

若方程(242)有重根,即 $\rho_1=\rho_2$,則,一般,祇存在一個解,他以 ρ_1 來乘等於將變數 x 改為 $x+\omega$,這時代替(243)我們有如下的線性變換:

$$(244)\qquad \eta_1(x+\omega)=\rho_1\eta_1(x);\quad \eta_2(x+\omega)=a_{21}\eta_1(x)+\rho_1\eta_2(x)。$$

記住方程(242)不能有等於零的根,因為諸數 a_{ik} 所成的二階行列式不等於零。

有了上面這些結果,現在我們來討論各種不同場合之下的解的形式。首先,考察(243)的情形。取兩函數

$$\rho_1^{\frac{x}{\omega}}=e^{\frac{x}{\omega}\lg\rho_1};\quad \rho_2^{\frac{x}{\omega}}=e^{\frac{x}{\omega}\lg\rho_2},$$

其中 $\lg\rho_1$ 和 $\lg\rho_2$ 取一定的數值。將 x 改為 $x+\omega$ 時這兩函數各得到一個乘數 ρ_1 和 ρ_2。因此商式

$$\eta_1(x):\rho_1^{\frac{x}{\omega}}\quad 和\quad \eta_2(x):\rho_2^{\frac{x}{\omega}}$$

都是週期為 ω 的週期函數,因此,在(243)的情形可寫:

$$(245)\qquad \eta_1(x)=\rho_1^{\frac{x}{\omega}}\varphi_1(x);\quad \eta_2(x)=\rho_2^{\frac{x}{\omega}}\varphi_2(x),$$

其中 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是週期為 ω 的週期函數。在(244)的情形 $\eta_1(x)$ 仍可表示如(245)式。要研究 $\eta_2(x)$,可考察商式 $\eta_2(x):\eta_1(x)$。由(244)有:

$$\frac{\eta_2(x+\omega)}{\eta_1(x+\omega)}=\frac{\eta_2(x)}{\eta_1(x)}+c,\qquad \left(c=\frac{a_{21}}{\rho_1}\right)$$

即當 x 改爲 $x+\omega$ 時商式增加一項 c。但初等函數 $\frac{c}{\omega}x$ 亦有同樣的性質，因此兩函數之差 $\frac{\eta_2(x)}{\eta_1(x)}-\frac{c}{\omega}x$ 是個週期函數 $\psi_1(x)$。這樣，在(244)的場合，我們有：

$$\eta_1(x)=\rho_1^{\frac{x}{\omega}}\varphi_1(x);\quad \eta_2(x)=\frac{c}{\omega}x\eta_1(x)+\psi_1(x)\eta_1(x)$$

或

$$\eta_1(x)=\rho_1^{\frac{x}{\omega}}\varphi_1(x);\quad \eta_2(x)=\rho_1^{\frac{x}{\omega}}[\varphi_2(x)+x\varphi_3(x)], \tag{246}$$

其中 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$和 $\varphi_3(x)$都是週期函數。若常數 $c=0$，則第二個解 $\eta_2(x)$亦可表示如(245)式。

現在的情形之下，一般而論，我們沒有什麽一般的技巧可以作出二次方程式(242)。不過應注意這方程和他的根的幾個性質。用下面幾個最簡單的初始條件決定兩個線性獨立的解：

$$y_1(0)=1;\quad y_1'(0)=0;\quad y_2(0)=0;\quad y_2'(0)=1\text{。} \tag{247}$$

因爲方程(239)的係數和上列初始條件均爲實函數，故當 x 取實數值時兩解亦必取實數值。在(241)式中置 $x=0$，由初始條件(247)，得 $a_{11}=$ $=y_1(\omega)$, $a_{21}=y_2(\omega)$。同樣，將(241)式微分一次，再令 $x=0$，則得 $a_{12}=y_1'(\omega)$, $a_{22}=y_2'(\omega)$。故對以上所選的線性獨立的解，二次方程(242)成爲：

$$\begin{vmatrix} y_1(\omega)-\rho, & y_1'(\omega) \\ y_2(\omega), & y_2'(\omega)-\rho \end{vmatrix}=0, \tag{248}$$

由此立刻可知這方程的係數都是實數。

更詳細來考察一個特別情形，即當(239)式中不含 $y'(x)$ 的項時，這時方程成爲：

$$y''(x)+q(x)y(x)=0\text{。} \tag{249}$$

考察朗斯基行列式：

$$\Delta(x)=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)\text{。}$$

由[II, 24]知下面這公式成立：

$$\Delta(x)=\Delta(0)e^{-\int_0^x p(x)dx},$$

現在既然 $p(x)$ 恆等於零，故

$$\Delta(x)=C,$$

其中 C 是常數。如果兩解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 滿足初始條件(247)，則顯然 $C=1$。回到二次方程(248)。這方程中的常數項等於 $\Delta(\omega)=1$。因此，若對方程(249)取兩個互相獨立的，滿足初始條件(247)的解，則 ρ 的二次方程是

(250) $$\rho^2-2A\rho+1=0,$$

其中

(251) $$2A=y_1(\omega)+y_2'(\omega)。$$

若實數 A 滿足條件 $|A|>1$，則方程(250)有兩個不同的實根，其乘積等於 1，即一根的絕對值大於 1，另一根的絕對值小於 1。若 $|A|<1$，則(250)有兩個共軛虛根，絕對值都等於 1。最後，若 $A=\pm1$，則(250)有重根，等於 ±1。當 x 無限增大時 A 的數值是一樣很重要的說明解的行爲的東西。現在來研究上面說過的各種不同情形。

在(245)式中因子 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 都是週期函數，故當 x 無限增大時均爲有界。所以當 x 增加時解的行爲主要是由第一個因子決定：

(252) $$\rho_1^{\frac{x}{\omega}}=e^{\frac{x}{\omega}\lg\rho_1};\quad \rho_2^{\frac{x}{\omega}}=e^{\frac{x}{\omega}\lg\rho_2}。$$

$\lg\rho$ 的實數部分等於 $\lg|\rho|$，故若 $|A|>1$，則 $\lg|\rho_1|>0$, $\lg|\rho_2|<0$，當 $x\to+\infty$ 時(252)中第一個函數的模無限增大，而第二個函數則以零爲極限。回到(245)式可知當 $x\to+\infty$ 時第一個解非爲有界，而第二個解趨於極限零。方程的一般解

(253) $$C_1\eta_1(x)+C_2\eta_2(x)$$

當 $C_1\neq0$ 時亦非有界(不穩定情形)。若 $|A|<1$，則 $\lg|\rho_1|=\lg|\rho_2|=0$，因此對於所有的實數 x 函數(252)的絕對值等於 1。當 $x\to+\infty$ 時

(245)式的兩個解以及一般解(253)皆爲有界。若初始條件

$$y(0)=a;\ y'(0)=b$$

中的 a 和 b 的絕對值都很小，則常數 C_1 和 C_2 亦必絕對值很小，從而對所有 x 的正值，解的絕對值常是很小(穩定的情形)

剩下來還有 $A=\pm1$ 的情形，這時方程(250)有重根。先設 $A=1$，即 $\rho_1=\rho_2=1$。由(246)式可取兩解爲

(254) $$\eta_1(x)=\varphi_1(x);\ \eta_2(x)=\varphi_2(x)+x\varphi_3(x),$$

其中 $\varphi_k(x)$ 是週期函數。第一個解是週期函數，一般，第二個解並非有界，因含乘數 x 的緣故。祇有當 $\varphi_3(x)$ 恆等於零的特別情形第二個解才是週期函數。最後，若 $A=-1$，即 $\rho_1=\rho_2=-1$，則可取 $\lg\rho_1=\pi i$，代替(254)式我們有：

$$\eta_1(x)=e^{i\frac{\pi x}{\omega}}\varphi_1(x);\quad \eta_2(x)=e^{i\frac{\pi x}{\omega}}[\varphi_2(x)+x\varphi_3(x)]。$$

現在第一個解是週期函數，週期等於 2ω，和上面的情形一樣，第二個解一般並非有界。

舉一個簡單的例子：考察係數爲常數的方程：

(255) $$y''(x)+qy(x)=0。$$

常數 q 可以看做具有任意週期 ω 的週期函數。先假設 q 是正數。這時記 $q=k^2$，方程有下面兩個解：

$$\eta_1(x)=e^{ikx};\ \eta_2(x)=e^{-ikx}。$$

當 x 改爲 $x+\omega$ 時這兩解得到乘數 $\rho_1=e^{ik\omega}$ 和 $\rho_2=e^{-ik\omega}$，絕對值都等於 1。所以這對應於 $|A|<1$ 的情形。若(255)式的常數 q 爲負數，則記 $q=-k^2$，我們得到下面兩個解：

$$\eta_1(x)=e^{kx};\ \eta_2(x)=e^{-kx}。$$

當 x 改爲 $x+\omega$ 時這兩解得到乘數 $\rho_1=e^{k\omega}$ 和 $\rho_2=e^{-k\omega}$ 都是正實數，故對應於 $A>1$ 的情形。當方程(249)中的係數 $q(x)$ 與 x 有關，但不變號時，可以得到類似的結果。先設 $q(x)<0$。設 $y_1(x)$ 是滿足初始條件 $y_1(0)=1$ 和 $y_1'(0)=0$ 的解。將方程(249)積分，並利用上述初始條件，

可得：

$$y_1'(x) = -\int_0^x q(x)y_1(x)dx\text{。} \tag{256}$$

當 x 取接近於零的正值時，$y_1(x)$ 接近於 1，故由 $q(x)<0$ 知 $y_1'(x)>0$，卽 $y_1(x)$ 是增加函數。由(256)的關係知道僅當 $y_1(x)$ 逐漸由正變負時 $y_1'(x)$ 才有取負值的可能。但是另一方面，要 $y_1(x)$ 取負值必須他一開始就是減少函數，卽必須一開始 $y_1'(x)$ 就是負的，這和前面所說相矛盾。故可肯定對於任何 $x>0$ 有 $y_1'(x)>0$ 和 $y_1(x)>1$，特別，$y_1(\omega)>1$。現在假設 $y_2(x)$ 是滿足初始條件 $y_2(0)=0$ 和 $y_2'(0)=1$ 的解。積分(249)式，卽得：

$$y_2'(x) = 1-\int_0^x q(x)y_2(x)dx\text{。} \tag{257}$$

當 x 接近於零時，$y_2'(x)$ 接近於 1，故取正值，因此 $y_2(x)$ 爲增加函數，並且大於零，因爲 $y_2(0)=0$。(257)式說明僅當 $y_2(x)$ 逐漸由正變負以後 $y_2'(x)$ 才可能取負值。但是另一方面，要使 $y_2(x)$ 取負值必須他一開始就是減少函數，卽必須一開始 $y_2'(x)$ 就是負的，這和前面所說相矛盾。故可肯定對於任何 $x>0$ 我們有 $y_2(x)>0$ 和 $y_2'(x)>1$，特別，$y_2'(\omega)>1$。由上面兩個關於 $y_1(\omega)$ 和 $y_2'(\omega)$ 的不等式可得

$$2A = y_1(\omega)+y_2'(\omega)>2\text{。}$$

這樣，我們就得到下面的定理：若在方程(249)中 $q(x)<0$，則 $A>1$，因此 ρ_1 和 ρ_2 是不同的正數。

將以上的論證改得更精密一些，我們可以把 $q(x)<0$ 的條件放鬆爲 $q(x)\leqslant 0$ 但這時當然 $q(x)$ 並不恆等於零。

$q(x)\geqslant 0$ 的情形研究非常困難。我們這裏祇舉一個結果，其證明可在 A. M. 廖普諾夫的著作“運動的穩定性的一般問題”中找到：若 $q(x)\geqslant 0$，並且滿足條件

$$\omega\int_0^\omega q(x)dx\leqslant 4, \tag{258}$$

則 ρ_1 和 ρ_2 是絕對值等於 1 的共軛複數。這定理提供使 $|A|<1$ 的充

分條件。

在上面提到的 A. M. 廖普諾夫的著作以及他以後的一連串的工作中對於具週期係數的線性（及非線性）方程式曾作了詳細而深刻的研究。和方程(249)有關係的我們特別要提到他的著作"具週期係數的線性二階微分方程理論中的一個級數"（科學院物理數學學報，第八套，1902 年，卷十三）。

119. 係數爲解析函數的情形 設 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是複變數 x 的函數，有實的週期 ω，並且在包含實軸在其內的某一帶域中爲正則。置 $x=x_1+ix_2$，假設上述帶域是由不等式 $-h\leqslant x_2\leqslant +h$ 所定義。我們可以用平行於虛軸的直線分這帶域爲許多闊度爲 ω 的長方形。由於 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的週期性，他們在每一個長方形中所取的數值都是一樣的。例如，我們取一個由不等式

$$0\leqslant x_1\leqslant\omega;\quad -h\leqslant x_2\leqslant +h,$$

所定義的長方形來看。

引進另一變數 z 以代 x：

$$z=e^{i\frac{2\pi x}{\omega}}。\tag{259}$$

在 z 平面上我們得到的不是長方形而是一個圓環，他由以原點爲中心，半徑等於 $e^{\frac{2\pi h}{\omega}}$ 和 $e^{-\frac{2\pi h}{\omega}}$ 的兩個圓周所圍成，但這圓環在沿正實軸的半徑上有割線，其兩岸對應於長方形的兩邊 $x_1=0$ 和 $x_1=\omega$。由週期性知道 $p(x)$ 和 $q(x)$ 視爲 z 的函數時各自在割線的兩岸上取相同的數值，因此他們的所有各階導數亦復如是。簡言之，$p(x)$ 和 $q(x)$ 視爲 z 的函數時在這圓環中爲單值正則，故可以羅朗級數展開：

$$p(x)=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}a_s z^s,\quad q(x)=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}b_s z^s。$$

由(259)式知：

$$\frac{d}{dx}=i\frac{2\pi}{\omega}z\frac{d}{dz};\quad \frac{d^2}{dx^2}=-\frac{4\pi^2}{\omega^2}z^2\frac{d^2}{dz^2}-\frac{4\pi^2}{\omega^2}z\frac{d}{dz}。$$

代入(259)式，得：

$$(260)\qquad -\frac{4\pi^2}{\omega^2}z^2\frac{d^2y}{dz^2}+\left[i\frac{2\pi}{\omega}z\sum_{s=-\infty}^{+\infty}a_s z^s-\frac{4\pi^2}{\omega^2}z\right]\frac{dy}{dz}+$$

$$+\sum_{s=-\infty}^{+\infty}b_s z^s y=0。$$

x 沿實軸移動長為 ω 的距離時，對應的 z 就在圓環內部走了一週，這時方程(260)的解受到一個線性變換。若 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是 x 的整函數，這在實際應用上是常常遇到的情形，則方程(260)的係數中的羅朗級數對於任何 z 的有限值皆為收斂，當然，$z=0$ 除外。但是這時，一般而論，$z=0$ 是方程(260)的非正則奇異點，因為羅朗級數中會有含 z 的負冪的項。

回到方程式(239)，因為他的係數在 $x=0$ 為正則，故可將滿足初始條件(247)的兩個解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 展開為冪級數：

$$y_1(x)=1+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\cdots,\quad y_2(x)=x+\beta_2x^2+\beta_3x^3+\cdots$$

這些級數當 $|x|<h$ 時必定收斂，若 $p(x)$ 和 $q(x)$ 為整函數，則級數對任何 x 皆為收斂。若 $h>\omega$，則可利用這兩級數來計算二次方程(248)中的 $y_k(\omega)$ 和 $y_k'(\omega)$。

120. 線性微分方程組 直到現在為止我們祇研究一個二階線性微分方程。他是兩個一階線性方程組的特別情形[95]。一般，一個 n 階線性方程可以用 n 個一階線性方程組來表示，如果取未知函數的各階導數為新的未知函數的話。我們現在來研究一般的一階線性方程組：

$$(261)\qquad \begin{cases} y_1'=p_{11}(x)y_1+p_{21}(x)y_2+\cdots+p_{n1}(x)y_n\\ y_2'=p_{12}(x)y_1+p_{22}(x)y_2+\cdots+p_{n2}(x)y_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n'=p_{1n}(x)y_1+p_{2n}(x)y_2+\cdots+p_{nn}(x)y_n, \end{cases}$$

其中 y_i 是未知函數，y_i' 是他們的導數，$p_{ik}(x)$ 是已知的係數，但和[93]的記號不同，我們以第一個足號表示這係數是和第幾個未知函數在一起的，以第二個足號表示他是在第幾個方程之中。對這方程組我們可以逐字應用[95]中所寫的逐步逼近法，因此也可得到[96]中所得到的同樣結果。則這些結果是：若所有的係數 $p_{ik}(x)$ 皆在圓 $|x-a|<r$ 中為正則，那末方程組(261)就有唯一的解，他在 $x=a$ 這點滿足任意已給的初始條件：

$$y_1(a)=\alpha_1;\ \cdots;\ y_n(a)=\alpha_n,$$

並且在圓 $|x-a|<r$ 中為正則，這個解可以沿任何不通過係數 $p_{ik}(x)$ 的奇異點的道路被解

析延拓出去，在整個解析延拓的過程中他常是方程組的解。

方程組(261)的解是由 n 個函數所組成。今設有方程組(261)的 n 個解。這些解中的函數的全體排成一個方陣：

$$Y=\begin{Vmatrix} y_{11}, & y_{12}, & \cdots, & y_{1n} \\ y_{21}, & y_{22}, & \cdots, & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1}, & y_{n2}, & \cdots, & y_{nn} \end{Vmatrix}.$$

其中第一個足號表明解的次序，第二個足號表明在某一解中函數的次序。現在我們稱這由 n 個解所形成的方陣爲方程組(261)的解，以 Y 記這方陣，又以 P 記諸係數 $p_{ik}(x)$ 所成的方陣。利用方陣的乘法，像[93]中一樣，我們可以把線性方程組(261)改寫爲下面的形式：

$$\frac{dY}{dx}=YP. \tag{262}$$

但要注意：因爲現在所用足號的意義和[93]中不同，故在上式中等式右邊兩因子的次序和[93]的(93)式右邊兩因子的次序不同。如常，以 $D(A)$ 記方陣 A 的行列式，我們可以證明對於 Y 的行列式 $D(Y)$ 成立下面的方程：

$$D(Y)=D(Y)\big|_{x=b}\, e^{\int_b^x [p_{11}(x)+p_{22}(x)+\cdots+p_{nn}(x)]dx}, \tag{263}$$

其中 b 是方程組(261)的一個普通點，即所有的係數 $p_{ik}(x)$ 在此均爲正則的點。(263)式通常稱爲夏可皮公式，他是我們從前見過的范代孟行列式所滿足的一個公式的推廣。

因行列式的基本定義是許多元素的乘積的和，易知要微分一個行列式的時候祇要分別微分他每一行的元素，然後把這樣得到的許多行列式加在一起就好了。例如，當 $n=2$ 時，

$$\frac{dD(Y)}{dx}=\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_{11}, & y_{12} \\ y_{21}, & y_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_{11}', & y_{12} \\ y_{21}', & y_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_{11}, & y_{12}' \\ y_{21}, & y_{22}' \end{vmatrix},$$

以方程組中各導數的表示式代入上式右邊，即得：

$$\frac{dD(Y)}{dx}=\begin{vmatrix} p_{11}y_{11}+p_{21}y_{12}, & y_{12} \\ p_{11}y_{21}+p_{21}y_{22}, & y_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_{11}, & p_{12}y_{11}+p_{22}y_{12} \\ y_{21}, & p_{12}y_{21}+p_{22}y_{22} \end{vmatrix}.$$

將每一行列式分解爲二行列式之和，把公共因子 p_{ik} 拿到行列式外面來，再除去兩行元素全同的等於零的行列式，即得

$$\frac{dD(Y)}{dx}=p_{11}\begin{vmatrix} y_{11}, & y_{12} \\ y_{21}, & y_{22} \end{vmatrix}+p_{22}\begin{vmatrix} y_{11}, & y_{12} \\ y_{21}, & y_{22} \end{vmatrix}$$

或

$$\frac{dD(Y)}{dx}=(p_{11}+p_{22})D(Y),$$

將這式子積分立刻可得夏可皮公式(263)。這公式說明如果行列式 $D(Y)$ 在某一點 $x=b$ 不等於零，則在方程組(261)的任一普通點 x（即方程組的所有係數的正則點）他也不等於零。當這事實成立時，我們稱 Y 爲完全解（形成 Y 的 n 個解這時爲線性獨立）。這時，我們還可考慮逆方陣 Y^{-1}，如[93]所知：

$$\frac{dY^{-1}}{dx}=-Y^{-1}\frac{dY}{dx}Y^{-1},$$

利用(262)式，知道逆方陣滿足下面的方程組：

$$\frac{dY^{-1}}{dx}=-PY^{-1}。\tag{264}$$

設 Z 是方程組(262)的一解，卽

$$\frac{dZ}{dx}=ZP。\tag{265}$$

作方陣 $$A=ZY^{-1}。$$

應用乘積的微分規則和方程(265)及(264)，得：

$$\frac{dA}{dx}=0,$$

卽方陣 A 是個常數方陣 C，其元素皆與 x 無關。由此

$$Z=CY,$$

換言之，方程組的任一解可以由完全解在左邊乘一常數方陣而得到。反過來，由(262)式立刻知道，解的左邊乘一任意常數方陣所得到的方陣仍是原方程組的解。注意

$$D(Z)=D(C)D(Y),$$

可知 $D(Z)\neq0$ 當且僅當 $D(C)\neq0$，就是說，以一個常數方陣 C 乘完全解 Y 的左邊仍舊得到一個完全解，當且僅當 $D(C)\neq0$。由(263)式可知當完全解 Y 被解析延拓時，在整個延拓過程中他常保持爲完全解，因爲行列式不等於零的緣故。注意：若用[93]中的記號，我們應該在一個解的右邊，而不是左邊，乘以常數方陣，才可得到另一個解。

設 $x=a$ 是平面上一點，他是係數 $p_{ik}(x)$ 的極點或本性奇異點。繞着這一點走一週，係數仍舊回到他原來的數值，但是解 Y 經過解析延拓後，一般，得到的是另一個解：

$$Y^{+}=VY,$$

其中 V 爲常數方陣，稱爲環繞 $x=a$ 這點的積分方陣，由

$$D(Y^{+})=D(V)D(Y)$$

以及完全解在整個解析延拓過程中常保持爲完全解的事實可知方陣 V 的行列式必不等於零。方陣 V 繫於完全解 Y 的選取。若取另一完全解 $Z=CY$ 以代 Y，其中 C 爲行列式不等於零的常數方陣，則有：
$$Z^{+}=CVY=CVC^{-1}Z,$$

就是說，新的解 Z 的積分方陣和方陣 V 相似。簡言之，不同的完全解有相似的積分方陣。

121. 正則奇異點 考察方程組的這種奇異點，他是係數的不高於一階的極點的。爲簡單起見，假設這點是 $x=0$，我們可以將方程組改寫成下面的形式：

$$\begin{cases}xy_1'=q_{11}(x)y_1+q_{21}(x)y_2+\cdots+q_{n1}(x)y_n\\ xy_2'=q_{12}(x)y_1+q_{22}(x)y_2+\cdots+q_{n2}(x)y_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ xy_n'=q_{1n}(x)y_1+q_{2n}(x)y_2+\cdots+q_{nn}(x)y_n。\end{cases}\tag{266}$$

其中 $q_{ik}(x)$ 在 $x=0$ 皆爲正則：

(267) $$q_{ik}(x)=a_{ik}+a'_{ik}x+a''_{ik}x^2+\cdots$$

現在要找方程組(266)的形式如：

(268) $$y_i=x^\rho(c_0^{(i)}+c_1^{(i)}x+\cdots)$$

的解。將這式代入(266)中，比較 x^ρ 的係數，我們得到一組決定係數 $c_0^{(i)}$ 的齊次方程：

(269) $$\begin{cases}(a_{11}-\rho)c_0^{(1)}+a_{21}c_0^{(2)}+\cdots+a_{n1}c_0^{(n)}=0\\ a_{12}c_0^{(1)}+(a_{22}-\rho)c_0^{(2)}+\cdots+a_{n2}c_0^{(n)}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1n}c_0^{(1)}+a_{2n}c_0^{(2)}+\cdots+(a_{nn}-\rho)c_0^{(n)}=0.\end{cases}$$

一般，若當 $m<k$ 時係數 $c_m^{(i)}$ 都知道了，比較 $x^{\rho+k}$ 的係數，我們可以得到一組決定係數 $c_k^{(i)}$ 的方程：

(270) $$\begin{cases}(a_{11}-\rho-k)c_k^{(1)}+a_{21}c_k^{(2)}+\cdots+a_{n1}c_k^{(n)}=H_{1k}\\ a_{12}c_k^{(1)}+(a_{22}-\rho-k)c_k^{(2)}+\cdots+a_{n2}c_k^{(n)}=H_{2k}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1n}c_k^{(1)}+a_{2n}c_k^{(2)}+\cdots+(a_{nn}-\rho-k)c_k^{(n)}=H_{nk},\end{cases}$$

其中 H_{sk} 是諸係數 $c_m^{(i)}(m<k)$ 的齊次線性函數。以上這些計算和[98]中的完全類似。現在以 $f(\rho)$ 記齊次方程組(269)的行列式：

(271) $$f(\rho)=\begin{vmatrix}a_{11}-\rho, & a_{21}, & \cdots, & a_{n1}\\ a_{12}, & a_{22}-\rho, & \cdots, & a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n}, & a_{2n}, & \cdots, & a_{nn}-\rho\end{vmatrix}。$$

要使方程組(269)有不全爲零的解，我們必須設

(272) $$f(\rho)=0;$$

對於其他非齊次方程組(270)我們則要求他們的行列式不等於零。這些行列式是由(269)的行列式改 ρ 爲 $\rho+k$ 而得到的，就是說，他等於 $f(\rho+k)$。設 ρ_1 爲方程(272)的一根，並且對於任何的正整數 k，ρ_1+k 都不是(272)的根。這時，以上的計算在形式上是不成問題了，因此我們造出來的級數(268)也在形式上滿足方程組(266)。和[98]中一樣，可以證明這些級數在級數(267)爲收斂的圓 $|x|<r$ 中亦爲收斂。

如果方程(272)的諸根彼此相差都不是整數，那末我們就可用上述方法造出方程組(266)的 n 個線性獨立的解來。不然的話，和[98]中一樣，一般而論，除了形式如(268)的解以外還有包含 $\lg x$ 的解。

將方程組(266)寫成方陣的形式：

$$x\frac{dY}{dx}=YQ,$$

其中 Q 是在 $x=0$ 爲正則的諸函數 $q_{ik}(x)$ 所成的方陣。我們可以把這方陣依 x 的正整數冪展开成級數：

$$Q=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots$$

其中 A_s 是常數方陣。特別，A_0 由諸元素 a_{ik} 組成，A_1 由諸元素 a'_{ik} 組成，餘類推。方程組(266)可寫成：

(273) $$x\frac{dY}{dx}=Y(A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots)。$$

現在要求這方程組的形式爲

$$Y=x^W(I+C_1x+C_2x^2+\cdots)$$

的解，其中 W 和 C_s 是所求的未知方陣。我們有：

$$\frac{dY}{dx}=Wx^{W-1}(I+C_1x+C_2x^2+\cdots)+x^W(C_1+2C_2x+\cdots)。$$

代入方程(273)，並在左邊用 x^{-W} 乘之，得：

$$W(I+C_1x+C_2x^2+\cdots)+x(C_1+2C_2x+\cdots)=(I+C_1x+C_2x^2+\cdots)(A_0+A_1x+\cdots)。$$

比較常數項得到 $$W=A_0,$$

再比較 x^k 的係數，我們就得到一組的方陣方程，可以逐步地決定方陣 C_k：

$$A_0C_k+kC_k=C_kA_0+C_{k-1}A_1+\cdots+C_1A_{k-1}+A_k$$

或 $$A_0C_k-C_kA_0+kC_k=C_{k-1}A_1+\cdots+C_1A_{k-1}+A_k。$$

我們不擬研究這方程組的一般情形，但祇看一個特別情形，卽當方陣 A_0 可化爲對角線方陣的情形，卽存在一個行列式不等於零的常數方陣 S，使得

$$SA_0S^{-1}=[\rho_1,\ \rho_2,\ \cdots,\ \rho_n],$$

其中諸 ρ_s 是方程(272)的根。

由下變換引進另一未知方陣 Y_1 以代 Y：

(274) $$Y=Y_1S。$$

代入方程(273)，並在右邊用 S^{-1} 乘之，卽得 Y_1 所滿足的方程組：

(275) $$x\frac{dY_1}{dx}=Y_1(B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots),$$

其中 $$B_k=SA_kS^{-1},$$

特別

(276) $$B_0=[\rho_1,\ \rho_2,\ \cdots,\ \rho_n]。$$

如前，要找尋方程組(275)的形式爲

$$Y_1=x^{W_1}(I+D_1x+D_2x^2+\cdots)$$

的解。代入(275)式得到 $W_1=B_0$ 以及下面一列決定係數 D_k 的方程：

(277) $$B_0D_k-D_kB_0+kD_k=E_k,$$

其中 E_k 是個可以用諸 $D_m(m<k)$ 來表示的方陣。回憶 B_0 是個對角線方陣(276)，由(277)式可得方陣 D_k 的元素所應滿足的關係：

$$\rho_i\{D_k\}_{ij}-\{D_k\}_{ij}\rho_j+k\{D_k\}_{ij}=\{E_k\}_{ij},$$

即
$$\{D_k\}_{ij}=\frac{1}{\rho_i-\rho_j+k}\{E_k\}_{ij}。$$

如果方程(272)的特根之差($\rho_i-\rho_j$)都不等於整數，所有的係數就可完全決定。注意：若方程(272)的根中有相等的，但方陣 A_0 可化爲對角線形式（卽有單重初等因子），則以上的計算仍屬有效。

我們沒有談到級數的收斂問題，因爲我們早已談過，這是可以和 [98] 中類似地去討論的。此外，還要注意：以上曾假設方程(273)的解：
$$Y=x^W(I+C_1x+C_2x^2+\cdots)$$
裏面常數項等於單位方陣。這是不關緊要的。重要的祇在他是一個行列式不等於零的方陣。實際上，設
$$Y=x^{W'}(C_0'+C_1'x+C_2'x^2+\cdots),$$
其中 $D(C_0')\neq0$。取另一解
$$C_0'^{-1}Y=C_0'^{-1}x^{W'}C_0'C_0'^{-1}(C_0'+C_1'x+C_2'x^2+\cdots)。$$

但是如我們所知，對於方陣的任何解析函數有：
$$C_0'^{-1}f(W')C_0'=f(C_0'^{-1}W'C_0')。$$

例如： $$C_0'^{-1}e^{W'}C_0'=e^W \qquad (W=C_0'^{-1}W'C_0')$$
因此新的解是： $$C_0'^{-1}Y=x^W(I+C_1x+C_2x^2+\cdots) \qquad (C_k=C_0'^{-1}C_k')。$$

對方程(275)的解也有同樣的話可說。

122. 正則方程組 考察最簡單的方程組，其係數爲有理函數，在有限遠處有一階極點，而在無限遠點等於零。假設 $x=a_j$ 是係數的一個一階極點。每一係數 $p_{ik}(x)$ 在此極點有留數 $u_{ik}^{(j)}$，這些留數的全體成一方陣 U_j。這樣，我們的方程組就可寫成下面的形式：

$$\frac{dY}{dx}=Y\sum_{j=1}^{m}\frac{U_j}{x-a_j}, \tag{278}$$

其中 U_j 是常數方陣。現在要求方程組(278)的這種解，他在一點 $x=b\neq a_j$ 變成單位方陣。記這解爲
$$Y(b;x)。$$

記住這個初始條件，我們可將(278)式改寫成下面的積分形式：

$$Y(b;x)=I+\int_b^x Y(b;x)\sum_{j=1}^{m}\frac{U_j}{x-a_j}dx, \tag{279}$$

其中方陣的積分就是把他每一元素積分的意思。

現在利用我們常用的逐次迫近法，卽設 $Y_0=I$，再用下面的公式來進行逐次迫近：

$$Y_n(x)=I+\int_b^x Y_{n-1}(x)\sum_{j=1}^{m}\frac{U_j}{x-a_j}dx。 \tag{280}$$

由逐次迫近法有：
$$Y(b;x)=Y_0+[Y_1(x)-Y_0]+[Y_2(x)-Y_1(x)]+\cdots$$

或爲簡單起見，記 $Z_n(x)=Y_n(x)-Y_{n-1}(x)$ $(Z_0=I)$

則由(280)有：

(281) $$Z_n(x)=\int_b^x Z_{n-1}(x)\sum_{j=1}^m \frac{U_j}{x-a_j}\,dx,$$

並可寫

(282) $$Y(b;x)=I+Z_1(x)+Z_2(x)+\cdots$$

利用一般公式(231)來決定這展開式中的前幾項。爲此，記

$$L_b(a_{j_1};x)=\int_b^x \frac{dx}{x-a_{j_1}}=\lg\frac{x-a_{j_1}}{b-a_{j_1}},$$

則得 $$Z_1(x)=\int_b^x \sum_{j=1}^m \frac{U_j}{x-a_j}dx=\sum_{j_1=1}^m U_{j_1}L_b(a_{j_1};x)。$$

同樣，記 $$L_b(a_{j_1},a_{j_2};x)=\int_b^x \frac{L_b(a_{j_1};x)}{x-a_{j_2}}\,dx,$$

得 $$Z_2(x)=\int_b^x \sum_{j_1=1}^m U_{j_1}L_b(a_{j_1};x)\sum_{j_2=1}^m \frac{U_{j_2}}{x-a_{j_2}}\,dx,$$

或 $$Z_2(x)=\sum_{j_1,j_2}^{1,\cdots,m} U_{j_1}U_{j_2}L_b(a_{j_1},a_{j_2};x),$$

其中等式右邊的和關於 j_1 和 j_2 互相獨立地從 1 到 m 相加。繼續這樣做下去，藉公式：

(283) $$L_b(a_{j_1};x)=\lg\frac{x-a_{j_1}}{b-a_{j_1}}$$
$$L_b(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};x)=\int_b^x \frac{L_b(a_{j_1},\cdots,a_{j_{\nu-1}};x)}{x-a_{j_\nu}}\,dx,$$

可以逐次決定係數 $L_b(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};x)$，而得

$$Z_\nu(x)=\sum_{j_1,\cdots,j_\nu}^{1,\cdots,m} U_{j_1}\cdots U_{j_\nu}L_b(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};x),$$

其中等式右邊的和關於 $j_1,\cdots,j_\nu$ 各自獨立地從 1 到 m 相加。最後，由(282)式即可用方陣 U_j 的冪級數來表示我們的解：

(284) $$Y(b;x)=I+\sum_{\nu=1}^\infty \sum_{j_1,\cdots,j_\nu}^{1,\cdots,m} U_{j_1}\cdots U_{j_\nu}L_b(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};x),$$

這級數中的係數是由(283)式逐次決定的。

解 $Y(b;x)$ 可以沿任一不通過奇異點 a_j 的道路被解析延拓出去，而且在他的整個存在域中，就是當他經過任意解析延拓以後，常可藉級數(284)表示。實際上，我們先證當係數 $L_b(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};x)$ 經過任意的解析延拓以後，級數(284)仍爲收斂。假設 l 是一條從 $x=b$ 出發，和諸奇異點 a_j 距離有限的曲線。δ 是各點 a_j 和曲線 l 間的最短距離，s 是曲線的弧長，從 b 點量起。利用通常對於路積分的估計，我們可以估計級數(284)的係數在 l 上的值如下[4]：

$$|L_b(a_{j_1}; x)| \leqslant \int_0^s \frac{ds}{\delta} = \frac{s}{\delta},$$

從而 $$|L_b(a_{j_1}, a_{j_2}; x)| \leqslant \int_0^s \frac{|L_b(a_{j_1}; x)|}{\delta} ds \leqslant \int_0^s \frac{s\,ds}{\delta^2} = \frac{1}{2!}\left(\frac{s}{\delta}\right)^2.$$

一般,在 l 上有: $$|L_b(a_{j_1}, \cdots, a_{j_\nu}; x)| \leqslant \frac{1}{\nu!}\left(\frac{s}{\delta}\right)^\nu。$$

但是冪級數 $$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{s}{\delta}\right)^\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{sz}{\delta}\right)^\nu,$$

對任何 z 值爲收斂,因此可知對任何的方陣 U_j 以及係數 $L_b(a_{j_1}, \cdots, a_{j_\nu}; x)$ 的任何解析延拓,級數 (284) 常爲絕對收斂 [96]。由上面的估計還可知道級數在任何有限區域 (一般是多葉的) 中爲一致收斂,祇要這區域和諸點 a_j 的距離大於零。最後,將級數 (284) 關於 x 逐項微分,易證他滿足(278)。實際上,我們可以把他改寫成下面的形式:

$$Y(b; x) = I + \sum_{j=1}^{m} U_j L_b(a_j; x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{j_1, \cdots, j_\nu}^{1, \cdots, m} U_{j_1} \cdots U_{j_\nu} U_j L_b(a_{j_1}, \cdots, a_{j_\nu}, a_j; x)。$$

關於 x 微分,記住

$$\frac{dL_b(a_j; x)}{dx} = \frac{1}{x - a_j} \text{ 和 } \frac{dL_b(a_{j_1}, \cdots, a_{j_\nu}, a_j; x)}{dx} = \frac{L_b(a_{j_1}, \cdots, a_{j_\nu}; x)}{x - a_j},$$

結果即得:

$$\frac{dY(b; x)}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \cdots, j_\nu}^{1, \cdots, m} U_{j_1} \cdots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1} \cdots a_{j_\nu}; x) \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j},$$

或

$$\frac{dY(b; x)}{dx} = \left[I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \cdots, j_\nu}^{1, \cdots, m} U_{j_1} \cdots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1} \cdots a_{j_\nu}; x)\right] \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j},$$

即

$$\frac{dY(b; x)}{dx} = Y(b; x) \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j}。$$

最後,顯而易見當 $x = b$ 時 (284) 的解變爲單位方陣,因爲由 (283) 式的定義,當 $x = b$ 時級數(284)中的係數都等於零。總結以上的論證,我們得到下面的定理:

定理　方程組 (278) 的解,當 $x = b$ 時變爲單位方陣的,在他的整個存在域中可以由級數(284)決定,不論其中的方陣 U_j 如何選取法。

若在 x 平面上從各點 a_j 引互不相交的割線 r_j 到無限遠去,則在這樣被割過的平面 (是個單通區域) 中,解 (284) 是 x 的單值函數,但是在割線的兩岸他將取不同的數值,因爲從正方向繞過每一奇異點 a_j 一週以後他就在左邊被乘上一個常數方陣 V_j,從前我們稱爲對應於奇異點 a_j 的積分方陣。現在我們要以方程組 (278) 中的係數方陣 U_j 來表示積分方陣 V_j。在出發點 $x = b$ 解的數值爲 I,即單位方陣,因此,要得到積分替代式 V_j 的值,必須知道解(284)沿着一條從 b 點出發,環繞 a_j 一週而又回到 b 點的閉線路 l_j 被解析延拓以後取的是什麼數值。

這數值由公式 (284) 立刻就可以得到，我們祇要在 (283) 式中取積分路線為前述的閉線路 l_j，求出與 x 無關的係數 $L_b(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};x)$ 的數值，代入(284)式就成了。

若記

$$(285)\qquad P_j(a_j;b)=\int_{l_j}\frac{dx}{x-a_{j_1}}=\begin{cases}2\pi i & \text{當 } j=j_1\\ 0 & \text{當 } j\neq j_1\end{cases}$$

和

$$(286)\qquad P_j(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};b)=\int_{l_j}\frac{L_b(a_{j_1},\cdots,a_{j_{\nu-1}};x)}{x-a_{j_\nu}}\,dx,$$

則知 V_j 可以表示為如下的方陣冪級數，不論諸方陣 U_j 如何選取，這級數常為絕對收斂。

$$(287)\qquad V_j=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\cdots,j_\nu}^{1,\cdots,m}U_{j_1}\cdots U_{j_\nu}P_j(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};b)。$$

定理 積分替代式 V_j 是諸方陣 U_j 的整函數，由級數 (287) 所定義，其中的係數則由 (285)和(286)式所定義。

代替(286)式，我們可以證明：對於 ν 的兩個相鄰數值，對應的 P_j 的數值之間存在下面的關係：

$$(288)\quad P_j(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};b)=\int_{a_j}^{b}\left[\frac{P_j(a_{j_1},\cdots,a_{j_{\nu-1}};b)}{b-a_{j_\nu}}-\frac{P_j(a_{j_2},\cdots,a_{j_\nu};b)}{b-a_{j_1}}\right]db。$$

證明從略。

如果將上面得到的解 $Y(b;x)$ 沿着某一條從一點 x 出發而又回到這點的閉線路做解析延拓，那末在解析延拓的意義之下，這閉線路就相當於幾條從正或負方向繞過某幾個奇異點 a_j 的環路的和。因此回到 x 時我們的解在左邊被乘了一個常數方陣，他可表示為諸因子 V_j 或 V_j^{-1} 的乘積。在這意義下，我們將諸積分方陣 V_j 構成方程(278)的一個羣。

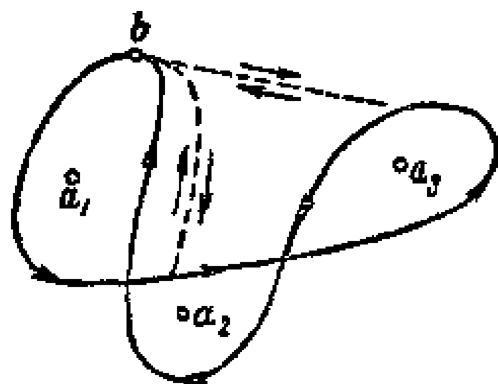


圖 72

舉一個簡單的例子說明一下。在 72 圖中有三個奇異點 a_1，a_2 和 a_3，還有一條閉線路 l 表示解析延拓的道路。圖中的虛線將這線路變為三條環繞各點 a_j 的環路的和，他們對於解析延拓而言是和 l 相抵的。又前面所設的點 x 現在取做 b 點。

第一條環路是繞着 a_1 的，走完這條環路以後我們在 b 點得到的解是 $V_1Y(b;x)$。其次是繞着 a_3 的環路，走完這條路以後，常數方陣 V_1 的值不變，而方陣 $Y(b;x)$ 則在左邊被乘了另一常數方陣 V_3，因此在 b 點得到的解是 $V_1V_3Y(b;x)$，最後，走完第三條環路以後，在 b 點得到的解是

$$V_1V_3V_2^{-1}Y(b;x)。$$

方程組(278)的任一解 $Y(x)$ 祇和 $Y(b;x)$ 差一個常數方陣

$$Y(x)=CY(b;x)，$$

由[120]知道他的積分替代式是: CV_jC^{-1}。

現在再看 $Y(b;x)$ 的逆方陣 $Y(b;x)^{-1}$。如我們所已知,這方陣滿足線性方程組:

$$\frac{dY(b;x)^{-1}}{dx}=-\sum_{j=1}^{m}\frac{U_j}{x-a_j}Y(b;x)^{-1}。$$

對這方程組應用逐次迫近法,我們得到 $Y(b;x)^{-1}$ 的冪級數表示式:

$$Y(b;x)^{-1}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\cdots,j_\nu}^{1,\cdots,m}U_{j_1}\cdots U_{j_\nu}L_b^*(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};x),\tag{289}$$

其中諸係數由下列式子決定:

$$L_b^*(a_{j_1};x)=-\int_b^x\frac{dx}{x-a_{j_1}}=-\lg\frac{x-a_{j_1}}{b-a_{j_1}}\tag{290}$$

和

$$L_b^*(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};x)=-\int_b^x\frac{L_b^*(a_{j_1},\cdots,a_{j_{\nu-1}};x)}{x-a_{j_\nu}}dx。\tag{291}$$

對於任何方陣 U_j 以及關於變數 x 的任意解析延拓,展開式(289)常爲絕對收斂。這些結果像從前一樣的可以得到。因爲

$$[V_jY(b;x)]^{-1}=Y(b;x)^{-1}V_j^{-1},$$

故知環繞奇異點 a_j 一週以後,$Y(b;x)^{-1}$ 在右邊被乘了一個常數方陣 V_j^{-1},這樣,利用級數(289),做他的諸係數沿着環繞奇異點 a_j 的閉線路 l_j 的解析延拓,就可將 V_j^{-1} 表示爲諸方陣 U_j 的冪級數:

$$V_j^{-1}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\cdots,j_\nu}^{1,\cdots,m}U_{j_1}\cdots U_{j_\nu}P_j^*(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};b),\tag{292}$$

其中諸係數由下面的公式逐次決定:

$$P_j^*(a_{j_1};b)=-\int_{l_j}\frac{dx}{x-a_{j_1}};\quad P_j^*(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};b)=-\int_{l_j}\frac{L_b(a_{j_1},\cdots,a_{j_{\nu-1}};x)}{x-a_{j_\nu}}dx。\tag{293}$$

注意一個特別情形,即當(278)式中諸方陣 U_j 兩兩可交換的情形,就是說,對任二足號 i 和 j 有

$$U_iU_j=U_jU_i。$$

這時可證方程組(278)的解 $Y(b;x)$ 可以寫成如下的有限形式:

$$Y(b;x)=\left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1}\cdots\left(\frac{x-a_m}{b-a_m}\right)^{U_m}。\tag{294}$$

易見上面的函數當 $x=b$ 時等於單位方陣。再證明他也滿足方程組(278)。應用通常乘積微分的規則微分上式,並注意:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j}=\frac{d}{dx}e^{U_j\lg\frac{x-a_j}{b-a_j}}=\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j}\frac{U_j}{x-a_j},\tag{295}$$

即得:

$$\frac{dY(b;x)}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1}\cdots\left(\frac{x-a_{j-1}}{b-a_{j-1}}\right)^{U_{j-1}}\frac{U_j}{x-a_j}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j}\cdots\left(\frac{x-a_m}{b-a_m}\right)^{U_m}。$$

當方陣 U_i 和 U_k 可交換時，他就和任一可展開為 U_k 的冪級數的函數 $f(U_k)$ 可交換。因此上式可以改寫為：

$$\frac{dY(b;x)}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1}\cdots\left(\frac{x-a_m}{b-a_m}\right)^{U_m}\frac{U_j}{x-a_j},$$

即

$$\frac{dY(b;x)}{dx}=Y(b;x)\sum_{j=1}^{m}\frac{U_j}{x-a_j},$$

方陣(294)確可滿足(278)。(294)式也可以從方程組(278)立刻得到，如果我們把其中的 Y 和 U_j 看成普通的變數和常數，實行變數分離，然後再積分。在我們現在的情形，這種形式上的計算是可以容許的，因為諸方陣 U_j 兩兩可交換之故。當諸方陣 U_j 兩兩可交換時，(294)式的右邊表示級數(284)的和。從(294)式可知在這情形下，環繞 a_j 一週後方陣 $Y(b;x)$ 在左邊被乘了一個常數因子

$$e^{2\pi i U_j}。$$

實際上，由公式

$$\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j}=e^{U_j\lg\frac{x-a_j}{b-a_j}},$$

再應用對數函數的多值性立刻得到我們所要證明的事。

注意：(295)式右邊祇出現唯一的方陣 U_j，所以兩因子必可交換。

123　解在奇異點鄰域中的表示　考察附有數字乘數的積分方陣的對數函數

$$W_j=\frac{1}{2\pi i}\lg V_j=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(V_j-I)^{\nu}。\tag{296}$$

當方陣 V_j 和單位方陣相當接近時，上式右邊的冪級數收斂於對數函數的主值。由(287)式可知當諸方陣 U_j 和零方陣相當接近時，這條件自然滿足。以後我們假設這些事實都成立。由(287)式將 (V_j-I) 的展開式代入(296)中，把同類項集在一起，即得 W_j 的方陣冪級數表示，當諸方陣 U_s 相當接近於零方陣時這冪級數收斂：

$$W_j=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\cdots,j_\nu}^{1,\cdots,m}U_{j_1}\cdots U_{j_\nu}Q_j(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};b)。\tag{297}$$

我們不擬計算這展開式中的係數，因為這工作由級數的代入和整理是非常容易做的。現在考察初等函數

$$\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}=e^{W_j\lg\frac{x-a_j}{b-a_j}}。\tag{298}$$

如此取對數函數的值，使當 $x=b$ 時其值為零，那末當 $x=b$ 時函數(298)就等於單位方陣了。環繞 a_j 一週以後對數函數增加了 $2\pi i$，故函數(298)變為另一函數

$$e^{W_j\left(2\pi i+\lg\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)}=e^{2\pi i W_j}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}=V_j\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j},$$

上式中因子的先後次序不關緊要，因為兩因子都是同一方陣 W_j 的冪級數，必可互相交換。

這樣，我們看到環繞 a_j 一週後初等函數 (298) 和 $Y(b;\,x)$ 一樣在左邊被乘上一個因子 V_j，並且當 $x=b$ 時他也等於單位方陣。因此可寫：

$$Y(b;\,x)=\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}\tilde{Y}^{(j)}(b;\,x), \tag{299}$$

其中 $\tilde{Y}^{(j)}(b;\,x)$ 是個方陣，當 $x=b$ 時等於單位方陣，且在 $x=a_j$ 的鄰域中為單值。現在我們證明他不但在 $x=a_j$ 的鄰域中為單值，並且在 $x=a_j$ 為正則，就是說，因子 $\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}$ 不僅以 $Y(b;\,x)$ 的支點為支點，並且也享有 $Y(b;\,x)$ 在 a_j 的全部奇異性，好像在研究二階方程的正則奇異點時一樣。

由(299)式知

$$\tilde{Y}^{(j)}(b;\,x)=\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j}Y(b;\,x), \tag{300}$$

關於 x 微分，得：

$$\frac{d\tilde{Y}^{(j)}(b;\,x)}{dx}=-\frac{W_j}{x-a_j}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j}Y(b;\,x)+\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j}\frac{dY(b;\,x)}{dx},$$

利用方程(278)和(300)，上式可改寫為：

$$\frac{d\tilde{Y}^{(j)}(b;\,x)}{dx}=-\frac{W_j}{x-a_j}\tilde{Y}^{(j)}(b;\,x)+\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j}Y(b;\,x)\sum_{s=1}^{m}\frac{U_s}{x-a_s},$$

即方陣 $\tilde{Y}^{(j)}(b;\,x)$ 是下列方程組的解：

$$\frac{d\tilde{Y}^{(j)}(b;\,x)}{dx}=\tilde{Y}^{(j)}(b;\,x)\sum_{s=1}^{m}\frac{U_s}{x-a_s}-\frac{W_j\tilde{Y}^{(j)}(b;\,x)}{x-a_j}。 \tag{301}$$

回到(300)式的右邊，我們看到兩個因子都可用諸方陣 U_s 的冪級數來表示，因此他們的乘積 $\tilde{Y}^{(j)}(b;\,x)$ 也可用諸方陣 U_s 的冪級數來表示。如果所有的 U_s 都等於零方陣，則 W_j 亦然，從而 (300) 式右邊的第一個因子成為單位方陣。對於 $Y(b;\,x)$，因之 $\tilde{Y}^{(j)}(b;\,x)$ 亦可說同樣的話。於是 $\tilde{Y}^{(j)}(b;\,x)$ 的冪級數表示可以由下面的形式來求：

$$\tilde{Y}^{(j)}(b;\,x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\cdots,j_\nu}^{1,\cdots,m}U_{j_1}\cdots U_{j_\nu}\tilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1},\,\cdots,\,a_{j_\nu};\,x)。 \tag{302}$$

將(297)和(302)式代入方程(301)中，然後比較 $U_{j_1}\cdots U_{j_\nu}$ 的係數，即得，

$$\frac{d\tilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1},\,\cdots,\,a_{j_\nu};\,x)}{dx}=\frac{\tilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1},\,\cdots,\,a_{j_{\nu-1}};\,x)}{x-a_{j_\nu}}-$$

$$-\frac{1}{x-a_j}\sum_{h=1}^{\nu}Q_j(a_{j_1},\,\cdots,\,a_{j_h};\,b)\tilde{L}_b^{(j)}(a_{j_{h+1}},\,\cdots,\,a_{j_\nu};\,x),$$

特別

$$\frac{d\tilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1};\,x)}{dx}=\frac{1}{x-a_{j_1}}-\frac{Q_j(a_{j_1};\,b)}{x-a_j}。$$

注意：上式關於 h 相加的各項其第二個因子當 $h=\nu$ 時沒有意義，這時應以單位方陣代之。以後我們常會遇到類似的和，其中首項或末項的某因子如果沒有意義的話，就應該以單位方陣來代替。

我們上面曾經說過，當 $x=b$ 而諸任意方陣 U_j 相當接近於零方陣時，$\overline{Y}^{(j)}(b;\,x)$ 變爲單位方陣，就是說，當 $x=b$ 時展開式 (302) 中全部的係數都應等於零。記住這事實，再利用上面的式子，我們就可以寫出一個逐步決定展開式(302)中的係數的公式：

$$(303)\qquad \overline{L}_b^{(j)}(a_{j_1},\,\cdots,\,a_{j_\nu};\,x)=\int_b^x\Bigg[\frac{\overline{L}_b^{(j)}(a_{j_1},\,\cdots,\,a_{j_{\nu-1}},\,x)}{x-a_{j_\nu}}-$$

$$-\frac{1}{x-a_j}\sum_{k=1}^{\nu}Q_j(a_{j_1},\,\cdots,\,a_{j_k};\,b)\overline{L}_b^{(j)}(a_{j_{k+1}},\,\cdots,\,a_{j_\nu};\,x)\Bigg]dx\,.$$

特別，當 $\nu=1$ 時有：

$$(304)\qquad \overline{L}_b^{(j)}(a_{j_1};\,x)=\int_b^x\left[\frac{1}{x-a_{j_1}}-\frac{Q_j(a_{j_1};\,b)}{x-a_j}\right]dx\,。$$

展開式 (302) 中的這些係數應該是 $x=a_j$ 的鄰域中的單值函數，因爲我們前面說過級數(302)的和在 $x=a_j$ 的鄰域中應是單值的緣故。由此立刻可知 (304) 式中被積分函數在極點 $x=a_j$ 的留數應等於零，從而函數 (304) 在 $x=a_j$ 處爲正則。現在要將這證明從 $(\nu-1)$ 推到 ν，即設當 $s<\nu$ 時，所有的函數

$$(305)\qquad \overline{L}_b^{(j)}(a_{j_1},\,\cdots,\,a_{j_s};\,x)$$

皆在 $x=a_j$ 爲正則，我們要證明當 $s=\nu$ 時函數(305)在 $x=a_j$ 亦爲正則。已知這些函數之間存在(303)的關係。由歸納法的假設事項可知 (303) 式中的被積分函數在 $x=a_j$ 祇可能有一階極點。如果在這極點的留數不等於零，那末函數(303)在 $x=a_j$ 的鄰域中必爲多值，這是不可能的。由此知道 (303) 式中的被積分函數以及這積分本身所代表的函數在 $x=a_j$ 亦爲正則，證畢。關於展開式(302)中的係數我們不擬作更詳細的研究。

所有以上的論證都限於諸方陣 U_s 相當接近於零方陣的場合。以後我們還要給 W_j 以及和他有關的方陣其他的表示式。這種表示式可被任意的方陣所適合，但若方陣 U_s 的諸特徵數中有彼此相差一個不等於零的整數者，則 U_s 將是這種表示式的奇異點。

124. 歸範解 解 $Y(b;\,x)$ 繫於 b 點的選取，在這點方陣的標準形式是單位方陣。因此方陣 $Y(b;\,x)$ 稱爲在 $x=b$ 是標準的方陣(解)。b 點必須不是諸奇異點 a_j。顯然，我們不能在奇異點 $x=a_j$ 給任何初始條件，但是可以嘗試去做出這種解來，他在奇異點 $x=a_j$ 的鄰域中具有最簡單的形式，正像我們從前在正則奇異點的鄰域中求二階方程的解一樣。下面我們就要從事於這一工作，並稱這種解爲在奇異點 $x=a_j$ 的歸範解。

我們可以寫：

$$Y(b;\,x)=\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}\overline{Y}^{(j)}(b;\,x)=(x-a_j)^{W_j}(b-a_j)^{-W_j}\overline{Y}^{(j)}(b;\,x),$$

其中等式右邊前面兩因子的次序並不關緊要，因爲兩因子中都祇包含同一方陣 W_j。將 $(b-a_j)^{-W_j}$ 併入 $\overline{Y}^{(j)}(b;\,x)$ 中，可記：

$$(306)\qquad Y(b;\,x)=(x-a_j)^{W_j}\overline{\overline{Y}}^{(j)}(b;\,x),$$

其中

$$\overline{\overline{Y}}^{(j)}(b;\,x)=(b-a_j)^{-W_j}\overline{Y}^{(j)}(b;\,x)$$

是一在 $x=a_j$ 爲正則的方陣。如果所有的 U_s 都等於零，則 $\bar{Y}^{(j)}(b;x)$ 變爲單位方陣，因此當 U_s 相當接近於零時 $\bar{Y}^{(j)}(b;x)$ 的行列式不等於零。方陣 $(b-a_j)^{-W_j}=e^{-W_j\lg(b-a_j)}$ 是方陣的指數函數[92]，故其行列式亦不等於零。由是，當所有的 U_s 都相當接近於零時，$\bar{Y}^{(j)}(b;x)$ 的行列式在 $x=a_j$ 不等於零，就是說，這時方陣 $\bar{Y}^{(j)}(b;x)^{-1}$ 在 $x=a_j$ 爲正則。方程組(278)的任一解與 $Y(b;x)$ 祇差一個常數方陣因子 C（在左邊）：

$$Y(x)=CY(b;x), \tag{307}$$

如果 $Y(x)$ 是完全解，則 C 的行列式不等於零。代替(307)式可寫：

$$Y(x)=C(x-a_j)^{W_j}C^{-1}C\bar{Y}^{(j)}(b;x),$$

但如[121]所知，

$$C(x-a_j)^{W_j}C^{-1}=(x-a_j)^{W'_j},$$

其中

$$W'_j=CW_jC^{-1}。 \tag{308}$$

現在取方陣 C 等於

$$C=[\bar{Y}^{(j)}(b;a_j)]^{-1} \tag{309}$$

則得：

$$C\bar{Y}^{(j)}(b;x)=I \text{ 當 } x=a_j。$$

這樣，我們就得到一個解 $\theta_j(x)$，稱爲在 $x=a_j$ 的歸範解，他可以表示爲

$$\theta_j(x)=(x-a_j)^{W'_j}\bar{\theta}_j(x),$$

其中 $\bar{\theta}_j(x)$ 是個方陣，在 $x=a_j$ 爲正則，並且在這點等於單位方陣。現在我們證明：歸範解中的方陣 W'_j 應該就是方陣 U_j。

首先，注意：所有以上做出來的方陣都可以表示爲諸方陣 U_s 的冪級數，祇要後者相當接近於零。同時，和 W_j 一樣，W'_j 的展開式中也不能包含常數項，即應有如下形式的展開式：

$$W'_j=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\cdots,j_\nu}^{1,\cdots,m}U_{j_1}\cdots U_{j_\nu}J_j(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu}), \tag{310}$$

關於 x 微分下式

$$\bar{\theta}_j(x)=(x-a_j)^{-W'_j}\theta_j(x),$$

和上節一樣，我們得到方陣 $\bar{\theta}_j(x)$ 所滿足的方程組：

$$\frac{d\bar{\theta}_j(x)}{dx}=\bar{\theta}_j(x)\sum_{s=1}^{m}\frac{U_s}{x-a_s}-\frac{W'_j\bar{\theta}_j(x)}{x-a_j}。 \tag{311}$$

如果所有的 U_s 都等於零，那末 $\bar{\theta}_j(x)$ 應當是個常數方陣，但由在 $x=a_j$ 的條件知道這常數方陣必爲單位方陣，即應成立如下的展開式：

$$\bar{\theta}_j(x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\cdots,j_\nu}^{1,\cdots,m}U_{j_1}\cdots U_{j_\nu}N_j(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};x)。 \tag{312}$$

這展開式中所有的係數應在 a_j 爲正則，並且在這點等於零，因爲級數的和對於任何的 U_s 在 $x=a_j$ 等於單位方陣的緣故。和上節一樣，將展開式(310)和(312)代入方程(311)中，比較係數，可得下面的等式：

(313)
$$N_j(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};x)=\int_{a_j}^{x}\Big[\frac{N_j(a_{j_1},\cdots,a_{j_{\nu-1}};x)}{x-a_{j_\nu}}-$$
$$-\frac{1}{x-a_j}\sum_{k=1}^{\nu}J_j(a_{j_1},\cdots,a_{j_k})N_j(a_{j_{k+1}},\cdots,a_{j_\nu};x)\Big]dx,$$

特別
$$N_j(a_{j_1};x)=\int_{a_j}^{x}\Big[\frac{1}{x-a_{j_1}}-\frac{J_j(a_{j_1})}{x-a_j}\Big]dx_{\circ}$$

由 $N_j(a_{j_1};x)$ 的正則性，上式指出：

(314)
$$J_j(a_{j_1})=\begin{cases}1 & 當\ j_1=j,\\ 0 & 當\ j_1\neq j_{\circ}\end{cases}$$

當 $\nu=2$ 時等式(313)是：

$$N_j(a_{j_1},a_{j_2};x)=\int_{a_j}^{x}\Big\{\frac{N_j(a_{j_1};x)}{x-a_{j_2}}-\frac{1}{x-a_j}[J_j(a_{j_1})N_j(a_{j_2};x)+J_j(a_{j_1},a_{j_2})]\Big\}dx_{\circ}$$

由從前的結果知道 $N_j(a_{j_2};a_j)=0$，因此上式中的被積分函數的第一項不以 $x=a_j$ 爲極點。從而第二項亦不以此點爲極點，由此立刻可知當 $x=a_j$ 時方括弧中應該等於零，但已知 $N_j(a_{j_2};a_j)=0$，所以全部係數 $J_j(a_{j_1},a_{j_2})$ 都應等於零。同樣，寫出對應於 $\nu=3$ 的(310)式，我們可以證明所有的係數 $J_j(a_{j_1},a_{j_2},a_{j_3})$ 都應等於零，餘類推。這樣，展開式(310)實際上祇是一個簡單的等式 $W_j'=U_j$，而在 $x=a_j$ 的附近解就有如下的表示式：

(315)
$$\theta_j(x)=(x-a_j)^{U_j}\bar\theta_j(x)_{\circ}$$

由(313)式可以逐次決定展開式(312)中的係數。注意

$$J_j(a_{j_1})=\begin{cases}1 & 當\ j_1=j,\\ 0 & 當\ j_1\neq j;\end{cases}$$
$$J_j(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu})=0 \qquad 當\ \nu\geqslant 2,$$

即得
$$N_j(a_{j_1};x)=\int_{a_j}^{x}\Big[\frac{1}{x-a_{j_1}}-\frac{\delta_{j_1j}}{x-a_j}\Big]dx$$

$$N_j(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu};x)=\int_{a_j}^{x}\Big[\frac{N_j(a_{j_1},\cdots,a_{j_{\nu-1}};x)}{x-a_{j_\nu}}-\frac{\delta_{j_1j}N_j(a_{j_2},\cdots,a_{j_\nu};x)}{x-a_j}\Big]dx,$$

其中 $\delta_{pq}=1$ 當 $p=q$，$\delta_{pq}=0$ 當 $p\neq q$。

環繞 a_j 一週以後，解(315)在左邊被乘上一個因子 $e^{2\pi iU_j}$。如我們所知，任一其他的解的積分方陣必和 $e^{2\pi iU_j}$ 相似，就是說，環繞奇異點 a_j 一週以後，方程組的任一解在左邊獲得一個乘數，他是一個和 $e^{2\pi iU_j}$ 相似的方陣。

回到(315)式。我們說過等式右邊第二個因子在 $x=a_j$ 爲正則。顯然，他的逆方陣

$$\bar\theta_j(x)^{-1}$$

在 $x=a_j$ 亦爲正則，因爲 $\bar\theta_j(x)$ 的行列式在 $x=a_j$ 等於 1 的緣故。一般，如果解 $Y(x)$ 在 a_j 的鄰域中可以表示爲：

$$Y(x)=(x-a_j)^{W_j'}\bar Y(x),$$

其中方陣 $\bar Y(x)$ 在 a_j 爲正則，並且行列式在這點不等於零，那末方陣 W_j' 稱爲解 $Y(x)$ 的指

數方陣。可以證明當 U_j 相當接近於零時，W_j^* 由 $Y(x)$ 唯一決定。特別，在 a_j 的歸範解的指數方陣就是 U_j，而一般，任一解的指數方陣都和 U_j 相似。

注意：在所有以上的論證中我們主要的是利用了下面一件事實：任一方陣函數的方陣冪級數表示是唯一的。我們用過多次的比較係數法就是基於這唯一性定理，將具有未知係數的冪級數代入方程的兩邊，然後比較同類項的係數，得出許多關係來。同樣，由唯一性定理又可以肯定：如果諸方陣 U_j 的冪級數的和在 $x=a_j$ 的鄰近是 x 的單值函數，那末這級數的所有的係數亦必為單值。

在[94]中曾經說過：如果兩冪級數的和對於任何階數的方陣常相等，則此二級數全同，即唯一性定理成立。在所有以上的論證中方陣的階數完全任意，不受限制，所以我們有權應用唯一性定理。

125．與富克斯類型的正則解的關係 回顧來考察在奇異點 $x=a_j$ 的歸範解：

$$\theta_j(x)=(x-a_j)^{U_j}\bar{\theta}_j(x)。$$

為清楚起見，假設方陣的階數 $n=2$，即有兩個聯立方程和兩個未知函數。假設方陣 S_j 將 U_j 化為對角線形式：

$$S_jU_jS_j^{-1}=[\rho_1,\ \rho_2]。$$

考察積分方陣：
$$Z_j(x)=S_j\theta_j(x)=(x-a_j)^{S_jU_jS_j^{-1}}S_j\bar{\theta}_j(x),$$

或
$$Z_j(x)=(x-a_j)^{[\rho_1,\ \rho_2]}\bar{Z}_j(x),$$

其中
$$\bar{Z}_j(x)=S_j\bar{\theta}_j(x)$$

在 $x=a_j$ 為正則，以 $\bar{Z}_{pq}^{(j)}(x)$ 記這方陣的元素：

$$\bar{Z}_j(x)=\begin{Vmatrix}\bar{Z}_{11}^{(j)}(x), & \bar{Z}_{12}^{(j)}(x)\\ \bar{Z}_{21}^{(j)}(x), & \bar{Z}_{22}^{(j)}(x)\end{Vmatrix},$$

其中 $\bar{Z}_{pq}^{(j)}(x)$ 是在 $x=a_j$ 為正則的函數。注意

$$(x-a_j)^{[\rho_1,\ \rho_2]}=\begin{Vmatrix}(x-a_j)^{\rho_1}, & 0\\ 0, & (x-a_j)^{\rho_2}\end{Vmatrix},$$

我們有
$$Z_j(x)=\begin{Vmatrix}(x-a_j)^{\rho_1}, & 0\\ 0, & (x-a_j)^{\rho_2}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}\bar{Z}_{11}^{(j)}(x), & \bar{Z}_{12}^{(j)}(x)\\ \bar{Z}_{21}^{(j)}(x), & \bar{Z}_{22}^{(j)}(x)\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}(x-a_j)^{\rho_1}\bar{Z}_{11}^{(j)}(x), & (x-a_j)^{\rho_1}\bar{Z}_{12}^{(j)}(x)\\ (x-a_j)^{\rho_2}\bar{Z}_{21}^{(j)}(x), & (x-a_j)^{\rho_2}\bar{Z}_{22}^{(j)}(x)\end{Vmatrix}。$$

這方陣的每一列代表聯立方程的一組解[120]。這樣，我們就得到了兩組解，具有和富克斯定理[98]中一個正則方程的解同樣的形式：

$$Y_{11}(x)=(x-a_j)^{\rho_1}\bar{Z}_{11}^{(j)}(x);\quad Y_{12}(x)=(x-a_j)^{\rho_1}\bar{Z}_{12}^{(j)}(x);$$

$$Y_{21}(x)=(x-a_j)^{\rho_2}\bar{Z}_{21}^{(j)}(x);\quad Y_{22}(x)=(x-a_j)^{\rho_2}\bar{Z}_{22}^{(j)}(x)。$$

在這些式子中 $Y_{pq}(x)$ 的第一個足號表明解的次序，第二個足號表示在某一解中函數的

次序。再注意：由 $Z_j(x)$ 的定義和 $\bar{\theta}_j(a_j)=1$ 可得

$$Z_j(a_j)=\left\| \begin{matrix} Z_{11}^{(j)}(a_j), & Z_{12}^{(j)}(a_j) \\ Z_{21}^{(j)}(a_j), & Z_{22}^{(j)}(a_j) \end{matrix} \right\| = S_j,$$

其中 S_j 是個行列式不等於零的方陣。$Z_{pq}^{(j)}(a_j)$ 顯然是 $Z_{pq}^{(j)}(x)$ 展開爲 $(x-a_j)$ 的冪級數時的常數項。

ρ_1 和 ρ_2 在 [98] 中是判定方程的兩根，現在則是 U_j 的特徵數。在 И. А. 拉波達尼列夫斯基的工作中積分方陣 $\theta_j(x)$ 不稱爲歸範，而稱爲先歸範（在奇異點 $x=a_j$）。在這種命名之下方陣 $Z_j(x)$ 可以稱爲在 $x=a_j$ 的歸範解。

126. 方陣 U_s 爲任意的場合 [123] 中的 (297) 式將積分方陣 $Y(b;x)$ 的指數替代式 W_j 表示爲諸方陣 U_s 的冪級數，這級數僅當 U_s 相當接近於零方陣時始收斂。同樣，[124] 中的 (312) 式給歸範方陣 $\theta_j(x)$ 的正則因子 $\bar{\theta}_j(x)$ 一個類似的表示式。現在我們要研究對於任意的 U_s 這兩方陣的表示的問題。

由定義，當 U_s 接近於零方陣時我們有[123]

$$W_j=\frac{1}{2\pi i}\lg V_j=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(V_j-I)^{\nu}。$$

以 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ 記方陣 U_j 的特徵數。如[124]中所知，方陣 V_j 和 $e^{2\pi i U_j}$ 相似，故 V_j 的特徵數是：

$$\eta_1=e^{2\pi i\rho_1};\ \eta_2=e^{2\pi i\rho_2},\ \cdots,\ \eta_n=e^{2\pi i\rho_n}。$$

設諸 η_k 互不相同，利用錫爾維斯脫公式可記：

$$W_j=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\frac{(V_j-\eta_1)\cdots(V_j-\eta_{k-1})(V_j-\eta_{k+1})\cdots(V_j-\eta_n)}{(\eta_k-\eta_1)\cdots(\eta_k-\eta_{k-1})(\eta_k-\eta_{k+1})\cdots(\eta_k-\eta_n)}\lg\eta_k。$$

爲清楚起見以後祇討論 $n=2$ 的情形。以 η_k 的值代入上式，得：

$$W_j=\frac{V_j-e^{2\pi i\rho_2}}{e^{2\pi i\rho_1}-e^{2\pi i\rho_2}}\rho_1+\frac{V_j-e^{2\pi i\rho_1}}{e^{2\pi i\rho_2}-e^{2\pi i\rho_1}}\rho_2,$$

或

$$W_j=\frac{e^{2\pi i\rho_2}\rho_1-e^{2\pi i\rho_1}\rho_2}{e^{2\pi i\rho_2}-e^{2\pi i\rho_1}}+\frac{\rho_2-\rho_1}{e^{2\pi i\rho_2}-e^{2\pi i\rho_1}}V_j。\tag{316}$$

若 $\rho_1=\rho_2$，上式變爲：

$$W_j=\left(\rho_1-\frac{1}{2\pi i}\right)+\frac{1}{2\pi i\,e^{2\pi i\rho_1}}V_j。\tag{317}$$

從前我們曾經將 V_j 表示爲 U_s 的冪級數，他對於任何 U_s 常爲收斂[122]。現在由(316)式卽得 W_j 的表示式，對於任何 U_s。如果 ρ_1 和 ρ_2 相差一個不等於零的整數，則(316)式失了意義，因爲這時等式右邊的分母等於零，而分子不等於零。這樣，對 W_j 而言，如果把他看成 U_s 的函數的話，那末特徵數可以相差一個不等於零的整數的方陣 U_j 就是這函數的奇異點了。對於其他的方陣 U_s 函數 W_j 不再有奇異點。上述奇異點的存在還是由於級數(297)

僅當 U_s 接近於零方陣才收斂的緣故。

現在要問：利用級數 (297) 怎樣才可以將 W_j 表示為兩個對於任何 U_s 皆為收斂的冪級數的商。做一個 U_j 的數字函數，就是說，當 U_j 已給時，函數的值是個一定的數字：

$$\Delta(U_j)=e^{-i\pi(\rho_1+\rho_2)}\frac{e^{2\pi i\rho_1}-e^{2\pi i\rho_2}}{2\pi i(\rho_1-\rho_2)}=\frac{\sin\pi(\rho_1-\rho_2)}{\pi(\rho_1-\rho_2)}。\tag{318}$$

我們可以把他展開為對任何 ρ_1 和 ρ_2 皆為收斂的冪級數：

$$\Delta(U_j)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!}\pi^{2\nu}(\rho_1-\rho_2)^{2\nu}。\tag{319}$$

以 $\{U_j\}_{pq}$ 記方陣 U_j 的元素，我們可以寫出 ρ_1 和 ρ_2 所滿足的二次方程：

$$\begin{vmatrix}\{U_j\}_{11}-\rho, & \{U_j\}_{12}\\ \{U_j\}_{21}, & \{U_j\}_{22}-\rho\end{vmatrix}=0。$$

其次，我們有：
$$(\rho_1-\rho_2)^2=(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2,$$
利用二次方程的根的和與乘積的性質，可將 $(\rho_1-\rho_2)^2$ 表示為 $\{U_j\}_{pq}$ 的函數：

$$(\rho_1-\rho_2)^2=(\{U_j\}_{11}+\{U_j\}_{22})^2-4(\{U_j\}_{11}\{U_j\}_{22}-\{U_j\}_{12}\{U_j\}_{21})。$$

代入(319)式，即將 $\Delta(U_j)$ 表示為 $\{U_j\}_{pq}$ 的冪級數：

$$\Delta(U_j)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!}\pi^{2\nu}\left[(\{U_j\}_{11}+\{U_j\}_{22})^2-4(\{U_j\}_{11}\{U_j\}_{22}-\{U_j\}_{12}\{U_j\}_{21})\right]^\nu,$$

這級數對於任何的 U_j 常為收斂，故為方陣 U_j 的元素的整函數。

為簡單起見，以 $\delta_\nu(U_j)$ 記上級數的一般項：

$$\Delta(U_j)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu(U_j),\tag{320}$$

其中 $\delta_0(U_j)=1$，當 $\nu>0$ 時 $\delta_\nu(U_j)$ 是 $\{U_j\}_{pq}$ 的 2ν 次齊次多項式。由 (316) 和 (318) 式知道乘積 $\Delta(U_j)W_j$ 中兩因子都是 $\{U_j\}_{pq}$ 的整函數，一般，他們是所有的方陣 U_s 的元素的整函數。由 [83] 知道這種整函數可以展開為 U_s 的元素的齊次多項式的冪級數。利用 (297) 和(320)式，可將展開式寫成：

$$\Delta(U_j)W_j=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\nu}\left[\sum_{j_1,\cdots,j_s}^{1,\cdots,m}U_{j_1}\cdots U_{j_s}\delta_{\nu-s}(U_j)Q_j(a_{j_1},\cdots,a_{j_s};b)\right]。$$

上面的級數對任何的 U_s 皆為收斂。這樣，我們就將 W_j 表示為兩個 U_s 的元素的整函數的商了：

$$W_j=\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\nu}\left[\sum_{j_1,\cdots,j_s}^{1,\cdots,m}U_{j_1}\cdots U_{j_s}\delta_{\nu-s}(U_j)Q_j(a_{j_1},\cdots,a_{j_s};b)\right]}{\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu(U_j)}。\tag{321}$$

注意：分母中是一個以數字為項的級數，這些數字祇和方陣 U_j 的元素有關。完全和以上相同的論斷可以證明

$$\Delta(U_j)(x-a_j)^{W_j}\ 和\ \Delta(U_j)(x-a_j)^{-W_j}$$

都是 U_s 的元素的整函數。由(306)式知

$$\varDelta(U_j)\overline{Y}^{(j)}(b;\ x)^{-1}=Y(b;\ x)^{-1}\varDelta(U_j)(x-a_j)^{W_j}。$$

方陣 $Y(b;x)$ 和 $Y(b;x)^{-1}$ 都是方陣 U_s 的整函數，因此乘積 $\varDelta(U_j)\overline{Y}^{(j)}(b;x)^{-1}$ 是 U_s 的元素的整函數。由[124]知歸範方陣 $\theta_j(x)$ 可表示爲：

$$\theta_j(x)=\overline{Y}^{(j)}(b;\ a_j)^{-1}Y_b(b;\ x),$$

因此 $\varDelta(U_j)\theta_j(x)$ 也是 U_s 的元素的整函數。同樣可知乘積

$$\varDelta(U_j)\bar{\theta}_j(x)=(x-a_j)^{-U_j}\varDelta(U_j)\theta_j(x)$$

也是 U_s 的元素的整函數，因爲 $(x-a_j)^{-U_j}$ 是 U_j 的整函數之故。利用展開式(312)我們可以把歸範方陣 $\theta_j(x)$ 表示爲兩個 U_s 的元素的整函數的商：

$$(322)\qquad \theta_j(x)=\frac{(x-a_j)^{U_j}\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\sum\limits_{s=0}^{\nu}\left[\sum\limits_{j_1,\cdots,j_s}^{1,\cdots,m}U_{j_1}\cdots U_{j_s}\delta_{\nu-s}(U_j)N_j(a_{j_1},\ \cdots,\ a_{j_s};\ x)\right]}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu(U_j)}。$$

注意：在所有以上各公式中數字 $\varDelta(U_j)$ 可以和任一方陣交換次序。在(321)和(322)式的分子中，級數的項是和 U_s 的元素有關的方陣，因爲各項中的方陣因子 U_{jk} 和數字因子 $\delta_{\nu-s}(U_j)$ 都和他們有關。

公式(312)和(322)將歸範解表示爲方陣 U_s 的元素的冪級數或冪級數的商，而其中的係數 $N_j(a_{j_1},\ \cdots,\ a_{j_s};\ x)$ 則與 x 有關。反過來，我們也可以將 $\theta_j(x)$ 展開成 $(x-a_j)$ 的冪級數，其係數與 U_s 的元素有關。這級數在任一不包含 $x=a_j$ 以外的奇異點的圓 $|x-a_j|<R$ 中爲收斂。

我們曾證明過 $\bar{\theta}_j(x)$ 滿足方程(311)，其中 $W_j'=U_j$，即

$$\frac{d\bar{\theta}_j(x)}{dx}=\bar{\theta}_j(x)\sum_{s=1}^{n}\frac{U_s}{x-a_s}-\frac{U_j\bar{\theta}_j(x)}{x-a_j}。$$

以

$$(323)\qquad \bar{\theta}_j(x)=1+\sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}(x-a_j)^p$$

代入這方程中，其中 $A_j^{(p)}$ 是和 x 無關的未知方陣，比較等式兩邊 $(x-a_j)$ 的同次冪的係數，即得一列逐步決定方陣 $A_j^{(p)}$ 的方程：

$$(324)\qquad U_jA_j^{(p)}+pA_j^{(p)}-A_j^{(p)}U_j=-\sum_{h\neq j}\sum_{q=0}^{p-1}\frac{A_j^{(q)}U_h}{(a_h-a_j)^{p-q}}\qquad (p=1,\ 2,\ \cdots)。$$

和這類似的方程組我們早在[121]中遇到過了。我們不擬再求(324)式的解以及證明級數(323)的收斂，因爲所用的方法是和[98]中差不多的。但祇注意一件事，即乘積 $\varDelta(U_j)A_j^{(p)}$ 是方陣 U_s 的元素的整函數，並且可以展開爲：

$$\varDelta(U_j)A_j^{(p)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{p^{k+1}}\delta_{\nu-k}(U_j)\sum_{\lambda=0}^{k}\frac{(-1)^k k!}{\lambda!(k-\lambda)!}U_j^\lambda T_p U_j^{k-\lambda}\right],$$

其中 T_p 表示等式(313)的右邊。

127．非正則奇異點鄰近的强關式　現在我們考察係數以 $x=0$ 爲任意階極點的線性方程組，爲簡單計，假設這些係數都是一個多項式被除於 x 的正整數冪而得的商式。利用方陣記法，可將這方程組寫成：

$$\frac{dY}{dx}=Y\sum_{p=-s}^{t}T_p x^p, \tag{325}$$

其中 T_p 是已知的方陣。一般而論，$x=0$ 將是這方程組的非正則奇異點，但我們仍可對這方程組應用逐次迫近法而得一個形式分明的解，經過關於 x 的任意解析延拓後仍爲有效。如常，這個解可以表示爲方陣 T_p 的冪級數。現在取一點 $b\neq 0$，要求方程組的解 $Y(b;x)$ 使當 $x=b$ 時變爲單位方陣。我們可以寫下這個解所應滿足的通常形式的積分方程：

$$Y(b;x)=I+\int_b^x Y(b;x)\sum_{p=-s}^{t}T_p x^p\,dx\text{。}$$

匠 $Y_0=I$，

$$Y_n(x)=I+\int_b^x Y_{n-1}(x)\sum_{p=-s}^{t}T_p x^p\,dx, \tag{326}$$

則有

$$Y(b;x)=Y_0+[Y_1(x)-Y_0]+[Y_2(x)-Y_1(x)]+\cdots$$

簡記

$$Z_\nu(x)=Y_\nu(x)-Y_{\nu-1}(x), \qquad (Z_0=1)$$

則由(326)式有

$$Z_\nu(x)=\int_b^x Z_{\nu-1}(x)\sum_{p=-s}^{t}T_p x^p\,dx\text{。} \tag{327}$$

用下面的遞推公式定義一列 x 的函數：

$$L_{p_1}(b;x)=\int_b^x x^{p_1}\,dx;\quad L_{p_1,\cdots,p_\nu}(b;x)=\int_b^x L_{p_1,\cdots,p_{\nu-1}}(b;x)x^{p_\nu}\,dx\text{。} \tag{328}$$

用(327)和(328)式展開逐次迫近的計算，即得：

$$Z_1(x)=\int_b^x I\sum_{p_1=-s}^{t}T_{p_1}x^{p_1}\,dx=\sum_{p_1=-s}^{t}T_{p_1}L_{p_1}(b;x),$$

$$Z_2(x)=\int_b^x\sum_{p_1=-s}^{t}T_{p_1}L_{p_1}(b;x)\sum_{p_2=-s}^{t}T_{p_2}x^{p_2}\,dx=\sum_{p_1,p_2=-s}^{t}T_{p_1}T_{p_2}L_{p_1p_2}(b;x),$$

一般

$$Z_\nu(x)=\sum_{p_1,\cdots,p_\nu=-s}^{t}T_{p_1}\cdots T_{p_\nu}L_{p_1\cdots p_\nu}(b;x)\text{。}$$

這樣，所求的解就可用下面的方陣冪級數來表示：

$$Y(b;x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\cdots,p_\nu=-s}^{t}T_{p_1}\cdots T_{p_\nu}L_{p_1\cdots p_\nu}(b;x)\text{。} \tag{329}$$

像[122]中一樣，可以證明這級數絕對且一致收斂，因此就是所求的解。現在的情形下，

(328)式的積分都可求得出來，所以級數(329)中的係數都是可以明白地寫出來的。

代替(328)中的函數我們首先考察和他們同樣的積分，但是具有不同的任意常數：

$$M_{p_1}(x)=\int^x x^{p_1}dx;\ \cdots,$$

$$M_{p_1\cdots p_\nu}(x)=\int^x M_{p_1\cdots p_{\nu-1}}(x)x^{p_\nu}dx\text{。}$$

這些積分中的任意常數依照下面的辦法來決定：若 $p_1+\cdots+p_\nu+\nu\neq 0$，則要求函數 $M_{p_1\cdots p_\nu}(x)$ 具下之形式：

$$M_{p_1\cdots p_\nu}(x)=x^{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha_{p_1\cdots p_\nu}^{(\mu)}\lg^\mu(x),\tag{330}$$

其中 $\alpha_{p_1\cdots p_\nu}^{(\mu)}$ 是數字係數。若 $p_1+\cdots+p_\nu+\nu=0$，則積分常數可任意取之。首先證明這種決定任意常數的辦法是可能的。當 $\nu=1$ 時有：

$$M_{p_1}(x)=\int^x x^{p_1}dx=\begin{cases}x^{p_1+1}\cdot\dfrac{1}{p_1+1}, & \text{當 } p_1+1\neq 0\\ \alpha_{p_1}^{(0)}+\lg x, & \text{當 } p_1+1=0,\end{cases}$$

其中 $\alpha_{p_1}^{(0)}$ 是任意常數。現在假設當 $\lambda\leqslant\nu$ 時 (330) 式對所有的 $M_{p_1\cdots p_\lambda}(x)$ 都已經成立，我們要定義函數 $M_{p_1\cdots p_{\nu+1}}(x)$

$$M_{p_1\cdots p_{\nu+1}}(x)=\int^x x^{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha_{p_1\cdots p_\nu}^{(\mu)}\lg^\mu x\cdot x^{p_{\nu+1}}dx\text{。}$$

考察兩種情形。若 $p_1+\cdots+p_{\nu+1}+\nu+1\neq 0$，行分部積分，得：

$$M_{p_1\cdots p_{\nu+1}}(x)=\frac{x^{p_1+\cdots+p_{\nu+1}+\nu+1}}{p_1+\cdots+p_{\nu+1}+\nu+1}\sum_{\mu=1}^{\nu}\alpha_{p_1\cdots p_\nu}^{(\mu)}\lg^\mu x-$$

$$-\int^x\frac{x^{p_1+\cdots+p_{\nu+1}+\nu}}{p_1+\cdots+p_{\nu+1}+\nu+1}\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu\alpha_{p_1\cdots p_\nu}^{(\mu)}\lg^{\mu-1}x\,dx\text{。}$$

繼續施行分部積分，最後可得

$$M_{p_1\cdots p_{\nu+1}}(x)=x^{p_1+\cdots+p_{\nu+1}+\nu+1}\sum_{\mu=0}^{\nu+1}\alpha_{p_1\cdots p_{\nu+1}}^{(\mu)}\lg^\mu x,$$

其中諸係數 $\alpha_{p_1\cdots p_{\nu+1}}^{(\mu)}$ 是諸係數 $\alpha_{p_1\cdots p_\nu}^{(\mu)}$ 的線性結合，除了 $\alpha_{p_1\cdots p_\nu}^{(\mu)}$ 中已有的任意常數外不再包含新的任意常數。

若 $p_1+\cdots+p_{\nu+1}+\nu+1=0$，則

$$x^{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}x^{p_{\nu+1}}=\frac{1}{x},$$

故得

$$M_{p_1\cdots p_{\nu+1}}(x)=\alpha_{p_1\cdots p_{\nu+1}}^{(0)}+\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{\alpha_{p_1\cdots p_\nu}^{(\mu)}}{\mu+1}\lg^{\mu+1}x=\sum_{\mu=0}^{\nu+1}\alpha_{p_1\cdots p_{\nu+1}}^{(\mu)}\lg^\mu x,$$

其中 $\alpha^{(0)}_{p_1\cdots p_{\nu+1}}$ 是新的任意常數。這樣，我們就證明了依照(330)式決定常數是可能的。此外，由以上的論證立刻可知諸係數 α 的選取的全部任意性就在於當 $p_1+\cdots+p_\nu+\nu=0$ 時係數 $\alpha^{(0)}_{p_1\cdots p_\nu}$ 是任意選取的。

現在尋求逐步計算 $\alpha^{(\mu)}_{p_1\cdots p_\nu}$ 的辦法。當 $\nu=1$ 由前面的計算知

$$\alpha^{(0)}_{p_1}=\begin{cases}\dfrac{1}{p_1+1} & \text{當 } p_1+1\neq 0\\ \text{任意常數}, & \text{當 } p_1+1=0\end{cases}\qquad \alpha^{(1)}_{p_1}=\begin{cases}0 & \text{當 } p_1+1\neq 0,\\ 1 & \text{當 } p_1+1=0.\end{cases}$$

其次，由 $M_{p_1\cdots p_\nu}(x)$ 的定義有：

$$\frac{d}{dx}M_{p_1\cdots p_\nu}(x)=M_{p_1\cdots p_{\nu-1}}(x)x^{p_\nu},$$

或由(330)，得，

$$(p_1+\cdots+p_\nu+\nu)\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\cdots p_\nu}\lg^\mu x+\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu\alpha^{(\mu)}_{p_1\cdots p_\nu}\lg^{\mu-1}x=\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\alpha^{(\mu)}_{p_1\cdots p_{\nu-1}}\lg^\mu x,$$

從而

$$(p_1+\cdots+p_\nu+\nu)\,\alpha^{(\nu)}_{p_1\cdots p_\nu}=0$$

$$(p_1+\cdots+p_\nu+\nu)\,\alpha^{(\mu)}_{p_1\cdots p_\nu}+(\mu+1)\,\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\cdots p_\nu}=\alpha^{(\mu)}_{p_1\cdots p_{\nu-1}}$$

$$(\mu=\nu-1,\ \nu-2,\ \cdots,\ 1,\ 0).$$

首先考察 $p_1+\cdots+p_\nu+\nu\neq 0$ 的情形。這時我們有：

$$\alpha^{(\nu)}_{p_1\cdots p_\nu}=0;\ \alpha^{(\mu)}_{p_1\cdots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\left[\alpha^{(\mu)}_{p_1\cdots p_{\nu-1}}-(\mu+1)\,\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\cdots p_\nu}\right].$$

依次以 $\mu=\nu-1,\ \nu-2,\ \cdots$ 代入上式，得：

$$\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\cdots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\cdots p_{\nu-1}},$$

$$\alpha^{(\nu-2)}_{p_1\cdots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\left[\alpha^{(\nu-2)}_{p_1\cdots p_{\nu-1}}-\frac{\nu-1}{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\cdots p_{\nu-1}}\right],$$

一般

$$\alpha^{(\mu)}_{p_1\cdots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\left[\alpha^{(\mu)}_{p_1\cdots p_{\nu-1}}-\frac{\mu+1}{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\cdots p_{\nu-1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{(p_1+\cdots+p_\nu+\nu)^2}\,\alpha^{(\mu+2)}_{p_1\cdots p_{\nu-1}}-\cdots+(-1)^{\nu-\mu-1}\,\frac{(\mu+1)\cdots(\nu-1)}{(p_1+\cdots+p_\nu+\nu)^{\nu-\mu-1}}\,\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\cdots p_{\nu-1}}\right].$$

當 $p_1+\cdots+p_\nu+\nu=0$ 時，由前面寫過的公式得：

$$\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\cdots p_\nu}=\frac{1}{\mu+1}\,\alpha^{(\mu)}_{p_1\cdots p_{\nu-1}}\qquad(\mu=0,\ 1,\ \cdots,\ \nu-1)$$

而 $\alpha^{(0)}_{p_1\cdots p_\nu}$ 為任意。總結以上的結果，我們得到下面許多關係，藉以決定諸係數 α：

$$
(331)\begin{cases}
\alpha_{p_1}^{(0)}=\dfrac{1}{p_1+1} & \text{當 } p_1+1\neq 0\\[2ex]
\alpha_{p_1}^{(1)}=\begin{cases}0 & \text{當 } p_1+1\neq 0\\ 1 & \text{當 } p_1+1=0\end{cases}\\[2ex]
\alpha_{p_1\cdots p_\nu}^{(\nu)}=0; & (p_1+\cdots+p_\nu+\nu\neq 0)\\[2ex]
\alpha_{p_1\cdots p_\nu}^{(\mu)}=\dfrac{1}{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\Big[\alpha_{p_1\cdots p_{\nu-1}}^{(\mu)}-\dfrac{\mu+1}{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\alpha_{p_1\cdots p_{\nu-1}}^{(\mu+1)}+ \\
\qquad+\dfrac{(\mu+1)(\mu+2)}{(p_1+\cdots+p_\nu+\nu)^2}\alpha_{p_1\cdots p_{\nu-1}}^{(\mu+2)}-\cdots+\dfrac{(-1)^{\nu-\mu-1}(\mu+1)\cdots(\nu-1)}{(p_1+\cdots+p_\nu+\nu)^{\nu-\mu-1}}\alpha_{p_1\cdots p_{\nu-1}}^{(\nu-1)}\Big] \\
\qquad\qquad (\mu=\nu-1,\ \nu-2,\ \cdots,\ 1,0;\ p_1+\cdots+p_\nu+\nu\neq 0)\\[2ex]
\alpha_{p_1\cdots p_\nu}^{(\mu)}=\dfrac{1}{\mu}\alpha_{p_1\cdots p_{\nu-1}}^{(\mu-1)} & (\mu=\nu,\ \nu-1,\ \cdots,\ 2,\ 1;\ p_1+\cdots+p_\nu+\nu=0)
\end{cases}
$$

如果想以 $M_{p_1\cdots p_\nu}(x)$ 來表示函數 $L_{p_1\cdots p_\nu}(b;x)$，我們需要引進新的函數 $M^*_{p_1\cdots p_\nu}(x)$，他們是由下列等式逐步地，完全單值地定義起來的：

$$
(332)\qquad \begin{cases}
M^*_{p_1}(x)=-M_{p_1}(x)\\[1ex]
M^*_{p_1\cdots p_\nu}(x)=-\sum\limits_{\mu=0}^{\nu-1}M^*_{p_1\cdots p_\mu}(x)M_{p_{\mu+1}\cdots p_\nu}(x)。
\end{cases}
$$

在上式關於 μ 相加的各項中對應於 $\mu=0$ 的那一項的第一個因子 $M^*_{p_1\cdots p_\mu}(x)$ 當 $\mu=0$ 沒有意義，應以 1 來代替。現在證明

$$
(333)\qquad L_{p_1\cdots p_\nu}(b;x)=\sum_{\mu=0}^{\nu}M^*_{p_1\cdots p_\mu}(b)M_{p_{\mu+1}\cdots p_\nu}(x),
$$

其中對應於 $\mu=0$ 的項的第一個因子和對應於 $\mu=\nu$ 的項的第二個因子都應以 1 來替代。

當 $\nu=1$ 時這式子顯然成立，因爲由這些函數的定義知：

$$
L_{p_1}(b;x)=M_{p_1}(x)-M_{p_1}(b)=M_{p_1}(x)+M^*_{p_1}(b)。
$$

要證明(333)式對任一 ν 成立可以用歸納法。

假設當 $\lambda<\nu$ 時公式(333)對所有的 $L_{p_1\cdots p_\lambda}(x)$ 皆成立，則得：

$$
L_{p_1\cdots p_{\nu+1}}(b;x)=\int_b^x L_{p_1\cdots p_\nu}(b;x)x^{p_{\nu+1}}dx=
$$

$$
=\int_b^x\sum_{\mu=0}^{\nu}M^*_{p_1\cdots p_\mu}(b)M_{p_{\mu+1}\cdots p_\nu}(x)x^{p_{\nu+1}}dx,
$$

但由 $M_{p_1\cdots p_\nu}(x)$ 的定義：

$$
\int_b^x M_{p_{\mu+1}\cdots p_\nu}(x)x^{p_{\nu+1}}dx=M_{p_{\mu+1}\cdots p_{\nu+1}}(x)-M_{p_{\mu+1}\cdots p_{\nu+1}}(b),
$$

從而 $$L_{p_1\cdots p_{\nu+1}}(b;x)=\sum_{\mu=0}^{\nu}M^*_{p_1\cdots p_\mu}(b)[M_{p_{\mu+1}\cdots p_{\nu+1}}(x)-M_{p_{\mu+1}\cdots p_{\nu+1}}(b)],$$

或利用當 $x=b$ 時(332)的第二式，卽得：

$$L_{p_1\cdots p_{\nu+1}}(b;x)=\sum_{\mu=0}^{\nu+1}M^*_{p_1\cdots p_\mu}(b)M_{p_{\mu+1}\cdots p_{\nu+1}}(x),$$

即 (333) 式對 $L_{p_1\cdots p_{\nu+1}}(b;x)$ 亦成立，故由歸納法知道他對於任意的 ν 都成立。由 (332) 式知道 $M^*_{p_1\cdots p_\nu}(x)$ 有和 $M_{p_1\cdots p_\nu}(x)$ 同樣的形式，但係數不同：

(334) $$M^*_{p_1\cdots p_\nu}(x)=x^{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{*(\mu)}_{p_1\cdots p_\nu}\lg^\mu x\text{。}$$

要想比較簡便地得到計算係數 $\alpha^{*(\mu)}_{p_1\cdots p_\nu}$ 的方法，我們先證明對於 $M^*_{p_1\cdots p_\nu}$ 成立下面的公式：

(335) $$M^*_{p_1}(x)=-\int^x x^{p_1}dx;\quad M^*_{p_1\cdots p_\nu}(x)=-\int^x x^{p_1}M^*_{p_2\cdots p_\nu}(x)dx\text{。}$$

積分常數應如此取法，使得 (334) 式成立。如前，這樣就決定了 $\alpha^{*(\mu)}_{p_1\cdots p_\nu}$ 當 $p_1+\cdots+p_\nu+\nu\neq 0$。至於當 $p_1+\cdots+p_\nu+\nu=0$ 時 $\alpha^{*(0)}_{p_1\cdots p_\nu}$ 如何取法，我們下面再說。當 $\nu=1$ 時有：

$$\frac{d}{dx}M^*_{p_1}(x)=-\frac{d}{dx}M_{p_1}(x)=-x^{p_1},$$

因此 $$M^*_{p_1}(x)=-\int^x x^{p_1}dx\text{。}$$

現在假設當 $\lambda<\nu-1$ 時等式

(336) $$\frac{d}{dx}M^*_{p_1\cdots p_\lambda}(x)=-x^{p_1}M^*_{p_2\cdots p_\lambda}(x),$$

當成立，要證明他當 $\lambda=\nu$ 時也成立。由 (332) 式有：

$$\frac{d}{dx}M^*_{p_1\cdots p_\nu}(x)=-\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\Big[M_{p_{\mu+1}\cdots p_\nu}(x)\frac{d}{dx}M^*_{p_1\cdots p_\mu}(x)+$$
$$+M^*_{p_1\cdots p_\mu}(x)\frac{d}{dx}M_{p_{\mu+1}\cdots p_\nu}(x)\Big],$$

或由 (336) 式和 $M_{p_1\cdots p_\nu}(x)$ 的定義，得：

$$\frac{d}{dx}M^*_{p_1\cdots p_\nu}(x)=x^{p_1}\sum_{\mu=1}^{\nu-1}M^*_{p_2\cdots p_\mu}(x)M_{p_{\mu+1}\cdots p_\nu}(x)-$$
$$-\sum_{\mu=0}^{\nu-1}M^*_{p_1\cdots p_\mu}(x)M_{p_{\mu+1}\cdots p_{\nu-1}}(x)x^{p_\nu}\text{。}$$

但由 (332)： $$\sum_{\mu=0}^{\nu-1}M^*_{p_1\cdots p_\mu}(x)M_{p_{\mu+1}\cdots p_{\nu-1}}(x)=0,$$

又 $$\sum_{\mu=1}^{\nu-1}M^*_{p_2\cdots p_\mu}(x)M_{p_{\mu+1}\cdots p_\nu}(x)=-M^*_{p_2\cdots p_\nu}(x),$$

所以 $$\frac{d}{dx}M^*_{p_1\cdots p_\nu}(x)=-x^{p_1}M^*_{p_2\cdots p_\nu}(x),$$

這就是我們所要證明的。和我們從前對於 $\alpha^{(\mu)}_{p_1\cdots p_\nu}$ 完全相類似，利用(335)式可以得到許多關係，藉以決定係數 $\alpha^{*(\mu)}_{p_1\cdots p_\nu}$。現在祇列舉最後的結果，不再重覆同樣的計算了：

$$
(337)\begin{cases}
\alpha^{*(0)}_{p_1}=-\dfrac{1}{p_1+1} & \text{當 } p_1+1\neq 0;\\[2mm]
\alpha^{*(1)}_{p_1}=\begin{cases}0 & \text{當 } p_1+1\neq 0\\ 1 & \text{當 } p_1+1=0,\end{cases}\\[2mm]
\alpha^{*(\nu)}_{p_1\cdots p_\nu}=0; & (p_1+\cdots+p_\nu+\nu\neq 0)\\[2mm]
\alpha^{*(\mu)}_{p_1\cdots p_\nu}=\dfrac{-1}{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\Big[\alpha^{*(\mu)}_{p_2\cdots p_\nu}-\dfrac{\mu+1}{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\alpha^{*(\mu+1)}_{p_2\cdots p_\nu}+\\
\quad+\dfrac{(\mu+1)(\mu+2)}{(p_1+\cdots+p_\nu+\nu)^2}\alpha^{*(\mu+2)}_{p_2\cdots p_\nu}+\cdots+\dfrac{(-1)^{\nu-\mu-1}(\mu+1)\cdots(\nu-1)}{(p_1+\cdots+p_\nu+\nu)^{\nu-\mu-1}}\alpha^{*(\nu-1)}_{p_2\cdots p_\nu}\Big]\\
\qquad\qquad (\mu=\nu-1,\ \nu-2,\ \cdots,\ 1,\ 0;\ p_1+\cdots+p_\nu+\nu\neq 0)\\[2mm]
\alpha^{*(\mu)}_{p_1\cdots p_\nu}=-\dfrac{1}{\mu}\alpha^{*(\mu-1)}_{p_2\cdots p_\nu} & (\mu=\nu,\ \nu-1,\ \cdots,\ 2,\ 1;\ p_1+\cdots+p_\nu+\nu=0)
\end{cases}
$$

從這些關係可以決定所有的 α^*，除了當 $p_1+\cdots+p_\nu+\nu=0$ 時的 $\alpha^{*(0)}_{p_1\cdots p_\nu}$，因為 $M^*_{p_1\cdots p_\nu}(x)$ 是由(332)式唯一決定，所以剩下來的這些係數也應該可以由已知的係數 α^* 和 α 唯一地表示出來。為此，可將 $M_{p_1\cdots p_\nu}(x)$ 的表示式(330)和 $M^*_{p_1\cdots p_\nu}(x)$ 的表示式(334)代入(332)式，然後約去等式兩邊的 $x^{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}$，即得：

$$\sum_{s=0}^{\nu}\alpha^{(s)}_{p_1\cdots p_\nu}\lg^s x=-\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\Big(\sum_{s=0}^{\mu}\alpha^{*(s)}_{p_1\cdots p_\mu}\lg^s x\Big)\Big(\sum_{s=0}^{\nu-\mu}\alpha^{(s)}_{p_{\mu+1}\cdots p_\nu}\lg^s x\Big)。$$

比較等式兩邊不含 $\lg x$ 的項，即得

$$(338)\qquad \sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{*(0)}_{p_1\cdots p_\mu}\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\cdots p_\nu}=0,$$

或將首末兩項分出：

$$(339)\qquad \alpha^{(0)}_{p_1\cdots p_\nu}+\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\alpha^{*(0)}_{p_1\cdots p_\mu}\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\cdots p_\nu}+\alpha^{*(0)}_{p_1\cdots p_\nu}=0。$$

用這關係可以決定所有的 $\alpha^{*(0)}_{p_1\cdots p_\nu}$ 當 $p_1+\cdots+p_\nu+\nu=0$。

最後，如果以 $M_{p_1\cdots p_\nu}(x)$ 的表示式(330)和 $M^*_{p_1\cdots p_\nu}(x)$ 的表示式(334)代入(333)式，即得(329)中級數的係數的確實數值：

$$L_{p_1\cdots p_\nu}(b;\,x)=\sum_{\mu=0}^{\nu}b^{p_1+\cdots+p_\mu+\mu}x^{p_{\mu+1}+\cdots+p_\nu+\nu-\mu}\times$$
$$\times\sum_{\lambda=0}^{\mu}\alpha^{*(\lambda)}_{p_1\cdots p_\mu}\lg^\lambda b\sum_{k=0}^{\nu-\mu}\alpha^{(k)}_{p_{\mu+1}\cdots p_\nu}\lg^k x.$$

將這結果代入(329)式，即得

$$(340)\qquad Y(b;x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\cdots,p_\nu=-s}^{t}T_{p_1}\cdots T_{p_\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}b^{p_1+\cdots+p_\mu+\mu}x^{p_{\mu+1}+\cdots+p_\nu+\nu-\mu}\times$$

$$\times\sum_{\lambda=0}^{\mu}\alpha^{*(\lambda)}_{p_1\cdots p_\mu}\lg^\lambda b\sum_{k=0}^{\nu-\mu}\alpha^{(k)}_{p_{\mu+1}\cdots p_\nu}\lg^k x.$$

以上的論證可以歸結成下面的定理：

定理 對於任意選取的方陣 T_p，當 $x=b$ 時等於單位方陣的方程組(325)的解常可由級數(340)決定之，這種表示不因關於 x 的任何解析延拓而有變更。級數(340)中諸係數 α 可由(331)式決定，但當 $p_1+\cdots+p_\nu+\nu=0$ 時 $\alpha^{(0)}_{p_1\cdots p_\nu}$ 是任意常數。諸係數 α^* 可由(337)式和(338)式決定。

(340)式是應用逐次逼近法於方程組(325)的一個顯明的例子。

環繞 $x=0$ 一週後 $Y(b;x)$ 在左邊被乘上一個常數方陣 V。不難求得 V 的任意整數冪 V^m 的數值。假設 m 是正整數，那末從正方向環繞 $x=0$ $|m|$ 次，如果 m 是負整數，就從負方向環繞 $x=0$ $|m|$ 次，然後再求這樣得到的 $Y(b;x)$ 在 $x=b$ 的數值好了。經過這種繞道以後，始值 $\lg x$ 變爲 $\lg x+2m\pi i$，故得：

$$(341)\qquad V^m=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\cdots,p_\nu=-s}^{t}T_{p_1}\cdots T_{p_\nu}b^{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\sum_{\lambda=0}^{\mu}\alpha^{*(\lambda)}_{p_1\cdots p_\mu}\lg^\lambda b\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\nu-\mu}\alpha^{(k)}_{p_{\mu+1}\cdots p_\nu}(\lg b+2m\pi i)^k\,。$$

上式中兩種 $\lg b$ 的數值應該一致，又其中每一係數都是 $\lg b$ 的多項式。但可證明這些係數中含 $\lg b$ 的各項實際上都互相消去，而(341)式可化爲下面的更簡單的式子：

$$(342)\qquad V^m=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\cdots,p_\nu=-s}^{t}T_{p_1}\cdots T_{p_\nu}b^{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{*(0)}_{p_1\cdots p_\mu}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\nu-\mu}\alpha^{(k)}_{p_{\mu+1}\cdots p_\nu}(2\pi mi)^k\,。$$

證明從略。

回到展開式(340)容易知道等式右邊的級數形式上可以從另外兩個方陣冪級數相乘而得到：

$$(343)\qquad\left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\cdots,p_\nu=-s}^{t}T_{p_1}\cdots T_{p_\nu}b^{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{*(\mu)}_{p_1\cdots p_\nu}\lg^\mu b\right]\times$$

$$\times\left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\cdots,p_\nu=-s}^{t}T_{p_1}\cdots T_{p_\nu}x^{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\cdots p_\nu}\lg^\mu x\right]。$$

上式左邊的因子不含 x，所以是一個常數方陣。如果删去這個因子，換言之，即以這常數方陣的逆方陣乘(343)的左邊，我們就得到

$$(344)\qquad I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\cdots,p_\nu=-s}^{t}T_{p_1}\cdots T_{p_\nu}x^{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\cdots p_\nu}\lg^\mu x,$$

他應該也是方程組(325)的解。這些雖然都是形式上的結論，但實際上我們可以嚴格證明當

諸方陣 T_p 接近於零時級數(344)爲收斂,並且是方程組(325)的解。這解已和 b 點的選取無關了。我們不擬繼續下去研究(344)式所決定的解的性質。關於方程組(325)的詳細研究可在 И. А. 拉波逸尼列夫斯基的原作中找到。

128. 一致收斂級數展開 以上我們做出來的級數在任何不包含奇異點的有限閉區域中都是一致收斂的。在正則奇異點的鄰域中,割去級數中的奇異部分以後我們得到一個泰勒級數,他在奇異點的整個鄰域中一致收斂。現在我們要做一個級數,以無限遠點爲非正則奇異點,且在該點的整個鄰域中的實軸上爲一致收斂。這就是從前的漸近展開式。考察兩個一階方程所成的方程組:

$$\frac{dY}{dx}=YT=Y\left(T_0+\frac{T_1}{x}+\frac{T_2}{x^2}+\cdots\right), \tag{345}$$

其中 T_k 爲常數方陣。若 $T_0=0$, 則 $x=\infty$ 爲正則奇異點。設 $Y=Y_1S$, 其中 S 爲常數方陣, 則 Y_1 滿足同樣的方程組, 但有係數方陣 $T'_k=ST_kS^{-1}$, 我們可以適當的取 S, 使得方陣 T'_0 具歸範形式。以後假設在(345)中 T_0 已經是歸範方陣。考察 T_0 爲對角線方陣的情形: $T_0=[a_1, a_2]$, 其中 a_1 和 a_2 有不同的實數部分,不失一般性,假設

$$R(a_1)>R(a_2), \tag{346}$$

其中 $R(z)$ 表示 z 的實數部分。

以 t_{ik} 記方陣 T 的元素,則有:

$$t_{ii}=a_i+\sum_{s=1}^{\infty}t_{ii}^{(s)}\frac{1}{x^s};\quad t_{ik}=\sum_{s=1}^{\infty}t_{ik}^{(s)}\frac{1}{x^s}\qquad (i\neq k) \tag{347}$$

設

$$T=P_0+P, \tag{348}$$

其中 P_0 是個對角線方陣:

$$P_0=\left[a_1+t_{11}^{(1)}\frac{1}{x},\quad a_2+t_{22}^{(1)}\frac{1}{x}\right]。 \tag{349}$$

則方陣 P 的元素 P_{ik} 是:

$$P_{ik}=\sum_{s=1}^{\infty}t_{ik}^{(s)}\frac{1}{x^s}\ (i\neq k);\quad P_{ii}=\sum_{s=2}^{\infty}t_{ii}^{(s)}\frac{1}{x^s}。 \tag{350}$$

由下式引進另一未知方陣 Z 以代 Y:

$$Y=e^{\int_1^x P_0dx}Z=e^{[a_1x+t_{11}^{(1)}\lg x-a_1,\ a_2x+t_{22}^{(1)}\lg x-a_2]}Z. \tag{351}$$

代入(345),卽得 Z 所滿足的方程:

$$\frac{dZ}{dx}=ZP_0-P_0Z+ZP, \tag{352}$$

或導入參數 λ, 寫成:

$$\frac{dZ}{dx}=ZP_0-P_0Z+\lambda ZP \tag{353}$$

而求這方程的形式爲

(354) $$Z=\sum_{m=0}^{\infty}Z_m\lambda^m$$

的解。代入(353)式，得

(355) $$\frac{dZ_m}{dx}=Z_mP_0-P_0Z_m+Z_{m-1}P \qquad (m=1, 2, 3, \cdots)$$

或對方陣 Z_m 的元素 $Z_{ik}^{(m)}$ 有：

(356) $$\frac{dZ_{ik}^{(m)}}{dx}=\left(\alpha_k+\frac{t_{kk}^{(1)}}{x}\right)Z_{ik}^{(m)}-\left(\alpha_i+\frac{t_{ii}^{(1)}}{x}\right)Z_{ik}^{(m)}+\sum_{s=1}^{2}Z_{is}^{(m-1)}P_{sk},$$

並可設 $Z_0=I$。這方程極易積分出來，卽得逐步計算 $Z_{ik}^{(m)}$ 的公式：

(357) $$Z_{ik}^{(m)}=e^{-r_{ik}}\int e^{r_{ik}}\sum_{s=1}^{2}Z_{is}^{(m-1)}P_{sk}\,dx,$$

其中

(358) $$r_{ik}=(\alpha_i-\alpha_k)x+(t_{ii}^{(1)}-t_{kk}^{(1)})\lg x=\alpha_{ik}x+\beta_{ik}\lg x。$$

(357)式中的積分區間當 $i<k$ 時爲 (x_0, x)，當 $i>k$ 時爲 (∞, x)，其中 x_0 是相當大的實數，而 $x>x_0$。以後常假設 $x_0\geqslant 1$。方陣 Z 應滿足方程(352)，他的元素是：

(359)
$$Z_{ik}=\sum_{m=1}^{\infty}Z_{ik}^{(m)} \qquad (i\neq k)$$
$$Z_{ii}=1+\sum_{m=1}^{\infty}Z_{ii}^{(m)}。$$

若能證這兩級數在整個無限區間 $x_0\leqslant x<\infty$ 上爲一致收斂，則由 (356) 式立刻知道由導數所組成的級數：

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{dZ_{ik}^{(m)}}{dx} \qquad (i, k=1, 2)$$

在上述區間的任何有限部分中爲一致收斂，從而方陣 Z 就滿足方程(352)，而由(351)式所決定的方陣 Y 則滿足(345)式。

現在來證明(359)中兩級數的一致收斂性。由(350)式知

(360) $$|P_{ik}|\leqslant\frac{a}{x}\ (i\neq k); \quad |P_{ii}|\leqslant\frac{a}{x^2},$$

其中 a 是一正常數。其次，應用洛畢達定則，易得下面的估計：

(361) $$e^{-r'_{ik}}\int e^{r'_{ik}}\frac{a}{x}dx\leqslant\frac{a_1}{x}; \quad \int\frac{a}{x^2}dx\leqslant\frac{a_1}{x},$$

其中 r'_{ik} 是 r_{ik} 的實數部分，a_1 是正常數。在這兩式子以及後來許多式子中積分的意義可像(357)式中一樣去了解。注意：當 x_0 增加時不等式右邊的常數 a_1 仍可取原來的數值。

由(357)和 $Z_0=I$ 得：

(362) $$Z_{ik}^{(1)}=e^{-r_{ik}}\int e^{r_{ik}}P_{ik}\,dx\ \ (i\neq k);\quad Z_{ii}^{(1)}=\int P_{ii}\,dx,$$

由(360)和(361)式得：

(363) $$|Z_{ik}^{(1)}|\leqslant\frac{a_1}{x}\ \ (k\neq i);\quad |Z_{ii}^{(1)}|\leqslant\frac{a_1}{x},$$

其次，由(357)，(333)和 $x\geqslant x_0\geqslant 1$：

$$|Z_{ik}^{(2)}|\leqslant e^{-r_{ik}}\int e^{r_{ik}}2\frac{aa_1}{x^2}\,dx\leqslant\frac{2a_1}{x_0}e^{-r_{ik}}\int e^{r_{ik}}\frac{a}{x}\,dx\leqslant\frac{2a_1}{x_0}\cdot\frac{a_1}{x},$$

$$|Z_{ii}^{(2)}|\leqslant\int 2\frac{aa_1}{x^2}\,dx\leqslant 2a_1\cdot\frac{a_1}{x},$$

$$|Z_{ik}^{(3)}|\leqslant 2a_1e^{-r_{ik}}\int e^{r_{ik}}2\frac{aa_1}{x^2}\,dx\leqslant\frac{(2a_1)^2}{x_0}\cdot\frac{a_1}{x},$$

$$|Z_{ii}^{(3)}|\leqslant\int\sum_{s=1}^{2}|Z_{is}^{(2)}|\cdot|P_{sk}|\,dx\leqslant\int\left(\frac{2a_1}{x_0}\frac{aa_1}{x^2}+2a_1\frac{aa_1}{x^3}\right)dx,$$

由此 $$|Z_{ii}^{(3)}|\leqslant\frac{(2a_1)^2}{x_0}\cdot\frac{a_1}{x}.$$

一般，可得：

(364) $$|Z_{ik}^{(2m)}|\leqslant\frac{(2a_1)^{2m-1}}{x_0^m}\cdot\frac{a_1}{x};\quad |Z_{ii}^{(2m)}|\leqslant\frac{(2a_1)^{2m-1}}{x_0^{m-1}}\cdot\frac{a_1}{x},$$
$$|Z_{ik}^{(2m+1)}|\leqslant\frac{(2a_1)^{2m}}{x_0^m}\cdot\frac{a_1}{x};\quad |Z_{ii}^{(2m+1)}|\leqslant\frac{(2a_1)^{2m}}{x_0^m}\cdot\frac{a_1}{x}.$$

和前面一樣，用歸納法極易證明這些式子，先從 $2m$ 到 $(2m+1)$，再從 $(2m+1)$ 到 $(2m+2)$。由這些估計立刻可知：若取 $x_0>(2a_1)^2$，則級數

$$\sum_{m=0}^{\infty}|Z_{ik}^{(m)}|$$

當 $i\neq k$ 和 $i=k$ 時皆在無限區間 $x_0\leqslant x<\infty$ 中一致收斂。

這樣，由(351)式的關係，即得下列方程(345)的解：

(365) $$y_{ik}=e^{\alpha_i x}x^{r_{ii}^{(1)}}Z_{ik}\qquad (i,\ k=1,\ 2),$$

如常，其中 i 表示解的次序，k 表示函數的次序。從(359)式和(364)的估計立刻可得：

(366) $$Z_{ik}=o\left(\frac{1}{x}\right)\ \ (i\neq k);\quad Z_{ii}=1+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

由這式和(346)式知道(365)的兩個解互爲線性獨立。

將展開式(350)代入積分(357)中，我們得到下面兩種形式的積分：

(367) $$e^{-\alpha x-\beta\lg x}\int_{x_0}^{x}e^{\alpha x+\beta\lg x}\frac{dx}{x^n}\ \ 和\ \ e^{\alpha x+\beta\lg x}\int_{\infty}^{x}e^{-\alpha x-\beta\lg x}\frac{dx}{x^n},$$

其中 $R(\alpha)>0$，$n\geqslant 1$。置 $x^\beta=e^{\beta\lg x}$，施行分部積分，我們可以寫出這些積分依照 $\frac{1}{\alpha}$ 的冪展開的漸近展開式。

利用展開式(350)和(367)中積分的漸近展開式，並對展開式的剩餘各項應用比估計(364)式時更精細的計算施行估計，即得 Z_{ik} 依 $\frac{1}{x}$ 的冪的漸近展開式，再由(365)可得 y_{ik} 的漸近展開式。現在計算 Z_{ik} 的漸近展開式的前面幾項爲例。

由(362)式得：

$$Z^{(1)}_{ik}=e^{-\alpha_{ik}x-\beta_{ik}\lg x}\int_{x_0}^{x}e^{\alpha_{ik}x+\beta_{ik}\lg x}\left(\frac{t^{(1)}_{ik}}{x}+\frac{t^{(2)}_{ik}}{x^2}+\frac{\varepsilon_{ik}}{x^2}\right)dx \qquad (i<k)$$

$$Z^{(1)}_{ik}=e^{-\alpha_{ik}x-\beta_{ik}\lg x}\int_{\infty}^{x}e^{\alpha_{ik}x+\beta_{ik}\lg x}\left(\frac{t^{(1)}_{ik}}{x}+\frac{t^{(2)}_{ik}}{x^2}+\frac{\varepsilon_{ik}}{x^2}\right)dx \qquad (i>k)$$

$$Z^{(1)}_{ii}=\int_{\infty}^{x}\left(\frac{t^{(2)}_{ii}}{x^2}+\frac{t^{(3)}_{ii}}{x^3}+\frac{\varepsilon_{ii}}{x^3}\right)dx,$$

其中 ε_{ik} 和 $\varepsilon_{ii}\to 0$ 當 $x\to\infty$。施行分部積分，得：

(368) $$Z^{(1)}_{ik}=\frac{a^{(1)}_{ik}}{x}+\frac{a^{(2)}_{ik}}{x^2}+\frac{\varepsilon'_{ik}}{x^2} \quad (\varepsilon'_{ik}\to 0 \text{ 當 } x\to\infty) \qquad (i,\ k=1,\ 2)。$$

將這結果代入(367)式，當 $m=2$ 時得：

$$Z^{(2)}_{ik}=e^{-\alpha_{ik}x-\beta_{ik}\lg x}\int e^{\alpha_{ik}x+\beta_{ik}\lg x}\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{a^{(1)}_{is}}{x}+\frac{a^{(2)}_{is}}{x^2}+\frac{\varepsilon'_{is}}{x^2}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{t^{(1)}_{sk}}{x}+\frac{t^{(2)}_{sk}}{x^2}+\frac{\varepsilon_{sk}}{x^2}\right)dx\ 。 \qquad (i\neq k)$$

由此即得漸近展開式：

(369) $$Z^{(2)}_{ik}=\frac{b^{(2)}_{ik}}{x^2}+\frac{\varepsilon''_{ik}}{x^2}, \quad (\varepsilon''_{ik}\to 0 \text{ 當 } x\to\infty) \qquad (i\neq k)。$$

其次， $$Z^{(2)}_{ii}=\int_{\infty}^{x}\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{a^{(1)}_{is}}{x}+\frac{a^{(2)}_{is}}{x^2}+\frac{\varepsilon'_{is}}{x^2}\right)\left(\frac{t^{(1)}_{si}}{x}+\frac{t^{(2)}_{si}}{x^2}+\frac{\varepsilon_{si}}{x^2}\right)dx,$$

從而

(370) $$Z^{(2)}_{ii}=\frac{b^{(1)}_{ii}}{x}+\frac{b^{(2)}_{ii}}{x^2}+\frac{\varepsilon''_{ii}}{x^2}\ .$$

由(369)和(370)可得如下的估計：

(371) $$|Z^{(2)}_{ik}|\leqslant\frac{b}{x^2}\quad(i\neq k);\qquad |Z^{(2)}_{ii}|\leqslant\frac{b}{x} \qquad (b\text{ 爲常數})。$$

由此再用(360)式和 $x\geqslant x_0\geqslant 1$ 的事實，可得：

$$|Z^{(3)}_{ik}|\leqslant 2ab\,e^{-r_{ik}}\int e^{r_{ik}}\frac{1}{x^3}\,dx,$$

$$|Z^{(3)}_{ii}|\leqslant 2ab\int\frac{1}{x^3}\,dx\ 。$$

但和(361)式類似，容易得到下面的估計：

$$e^{-r_{ik}}\int e^{r_{ik}}\frac{1}{x^3}\,dx\leqslant\frac{b_1}{x^3};\qquad \int\frac{1}{x^3}\,dx\leqslant\frac{b_1}{x^2} \qquad (b_1\text{ 是常數})。$$

於是可得不等式：

$$|Z_{ik}^{(3)}|\leqslant ab(2b_1)\frac{1}{x^2}\qquad (i,\ k=1,\ 2)。$$

代入(357)式當 $m=4$，並注意 $x\geqslant x_0\geqslant 1$，得：

$$|Z_{ik}^{(4)}|\leqslant\frac{abb_1 2^2}{x_0}e^{-r_{ik}}\int e^{r_{ik}}\frac{1}{x^2}\,dx\leqslant ab\frac{(2b_1)^2}{x_0}\cdot\frac{1}{x^2},\qquad (i\neq k)$$

$$|Z_{ii}^{(4)}|\leqslant abb_1 2^2\int\frac{1}{x^3}\,dx\leqslant ab(2b_1)^2\cdot\frac{1}{x^2}。$$

繼續這樣做下去，可得一般的估計式子如下：

$$|Z_{ik}^{(2m)}|\leqslant ab\frac{(2b_1)^{2m-2}}{x_0^{m-1}}\cdot\frac{1}{x^2}\quad(i\neq k);\qquad |Z_{ii}^{(2m)}|\leqslant ab\frac{(2b_1)^{2m-3}}{x_0^{m-2}}\cdot\frac{1}{x^2},$$

$$|Z_{ik}^{(2m+1)}|\leqslant ab\frac{(2b_1)^{2m-1}}{x_0^{m-1}}\cdot\frac{1}{x^2}\quad(i\neq k);\qquad |Z_{ii}^{(2m+1)}|\leqslant ab\frac{(2b_1)^{2m-1}}{x_0^{m-1}}\cdot\frac{1}{x^2},$$

由此有：

$$(371_1)\qquad \begin{aligned}&|Z_{ik}^{(2m)}|+|Z_{ik}^{(2m+1)}|\leqslant ab\frac{(2b_1)^{2m-2}}{x_0^{m-1}}(1+2b_1)\frac{1}{x^2},\qquad (i\neq k)\\ &|Z_{ii}^{(2m)}|+|Z_{ii}^{(2m+1)}|\leqslant ab\frac{(2b_1)^{2m-2}}{x_0^{m-1}}(x_0+2b_1)\frac{1}{x^2}。\end{aligned}$$

應用級數(359)和公式(368)，(370)，(371)可得：

$$(372)\qquad Z_{ik}=\frac{a_{ik}^{(1)}}{x}+\frac{\eta_{ik}}{x};\quad Z_{ii}=1+\frac{a_{ii}^{(1)}+b_{ii}^{(1)}}{x}+\frac{\eta_{ii}}{x},$$

其中 η_{ik} 和 $\eta_{ii}\to 0$ 當 $x\to\infty$。代入(365)式，可得 y_{ik} 的漸近展開式。要求出 Z_{ik} 的漸近展開式中以後各項，可以用類似於前面的方法去做。以上的方法可以不加改動的應用於 n 個聯立方程去，祇要方陣 T_0 的特徵數有互不相同的實數部分。

現在假設對角線方陣 $T_0=[\alpha_1,\ \alpha_2]$ 中的 α_1 和 α_2 有相等的實數部分 a。則可將(345)式中的 Y 先改寫爲 Y_1，再置 $Y_1=e^{ax}Y$，這樣得到 Y 所滿足的方程仍具(345)的形式，但其中 $T_0=[\alpha_1 i,\alpha_2 i]$，對角線上兩元素全是虛數了。現在假設方程(345)已經具有這性質。若此時方陣 T_1 等於零方陣，則可不加改變地應用以前的方法而得一致收斂級數和漸近展開式。若 $T_0=[\alpha,\ \alpha]$，則置 $Y_1=e^{-\alpha x}Y$，所得 Y_1 的方程組以無限遠點爲正則奇異點。

應用這節所得到的結果來研究線性微分方程：

$$(373)\qquad y''+\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\right)y'+\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots\right)y=0。$$

如常，引進兩函數 $y_1=y$，$y_2=y'$，可得兩個聯立方程，其中

$$T_0=\begin{Vmatrix}0, & -b_0\\ 1, & -a_0\end{Vmatrix},$$

這方陣的特徵方程是：

$$\lambda^2+a_0\lambda+b_0=0\ 。 \tag{374}$$

如果這方程的兩根的實數部分不相同，則可應用本節的方法來解。上述逐次迫近法首見於 П. П. 葉魯金的著作"可約方程組"(1946)之中。

在 В. В. 哈洛西羅夫的工作中（ДАН, 1949）他曾經考察過前面所說方陣 T_0 的特徵數有互不相同的實數部分的情形。

第六章　特殊函數

I　球函數

129. 球函數的定義　在這一章裏面我們將要研究幾種特殊類型的函數，這些函數在理論物理學中解微分方程時常會遇到的。他們通常都被定義為某些係數非為常數的線性方程的解。特別，在絃振動的問題中我們會遇到三角函數，而在圓膜振動的問題中會遇到貝塞爾函數。

我們先來研究所謂球函數，他和拉普拉斯方程有密切的關係。這方程我們從前已經談到多次。在直角坐標下其形式為

$$(1)\qquad \Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0。$$

現在要求這方程的這樣的解，他們是變數 x, y 和 z 的齊次多項式。

首先來看最簡單的特別情形。唯一的零次齊次多項式是個任意常數 a，他顯然滿足方程（1）。其次，齊一次多項式的一般形式為

$$U_1=ax+by+cz。$$

對於任意選取的常數係數 a, b 和 c 這多項式也滿足方程（1）。換言之，現在方程（1）有三個線性獨立的解 x, y 和 z，他們的線性結合而以任意常數為係數的就是方程（1）的形式為齊一次多項式的一般解。再看齊二次多項式

$$U_2=ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fzx。$$

代入方程（1），得到諸係數間的一個關係，即 $a+b+c=0$。例如，可設 $c=-a-b$，則得方程（1）的形式為齊二次多項式的一般解：

$$U_2=a(x^2-z^2)+b(y^2-z^2)+dxy+eyz+fzx。$$

這裏有五個線性獨立的解，即 x^2-z^2, y^2-z^2, xy, yz 和 zx，他們的線性結合而以任意常數為係數的就是方程（1）的形式為齊二次多項式的一般解。

再取齊三次多項式

$U_3=ax^3+by^3+cz^3+dx^2y+ex^2z+fy^2x+gy^2z+hz^2x+kz^2y+lxyz$。

代入方程(1)，得：

$$6(ax+by+cz)+2dy+2ez+2fx+2gz+2hx+2ky=0。$$

置 x，y 和 z 的係數爲零，得到聯繫諸係數的三個方程：

$$3a+f+h=0 \text{ 或 } a=-\frac{1}{3}(f+h)$$

$$3b+d+k=0 \text{ 或 } b=-\frac{1}{3}(d+k)$$

$$3c+e+g=0 \text{ 或 } c=-\frac{1}{3}(e+g)$$

因此方程(1)的形式爲齊三次多項式的一般解是：

$$U_3=d\left(x^2y-\frac{1}{3}y^3\right)+e\left(x^2z-\frac{1}{3}z^3\right)+f\left(y^2x-\frac{1}{3}x^3\right)+$$

$$+g\left(y^2z-\frac{1}{3}z^3\right)+h\left(z^2x-\frac{1}{3}x^3\right)+k\left(z^2y-\frac{1}{3}y^3\right)+lxyz。$$

在這場合我們有七個線性獨立的解。

今證一般情形：存在$(2n+1)$個線性獨立的齊 n 次多項式滿足方程(1)。我們要計算齊次多項式的係數的個數以及他們應該滿足的方程的個數。兩個變數的齊 n 次多項式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\cdots+a_ny^n$$

包含$(n+1)$個係數。三個變數的齊 n 次多項式可以寫成

$$(2)\qquad a_0z^n+\varphi_1(x,y)z^{n-1}+\cdots+\varphi_{n-1}(x,y)z+\varphi_n(x,y)$$

的形式，其中 $\varphi_k(x,y)$ 是齊 k 次多項式。因此，在齊次多項式(2)中係數的個數是：

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}。$$

把多項式(2)代入方程(1)的左邊，得到一個齊$(n-2)$次多項式，包含 $\frac{n(n-1)}{2}$ 項。這樣，多項式(2)的 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 個係數間就由

$\frac{(n-1)n}{2}$ 個齊次方程聯繫着。如果這些方程互相獨立，那末任意係數的個數祇有

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}=2n+1$$

個，這就是我們所要證明的。但這裏有一點沒有證明，卽前述 $\frac{(n-1)n}{2}$ 個方程是否互相獨立？為此，我們給這定理另一完備的證明。多項式(2)可以改寫成下面的形式：

$$U_n=\sum_{p+q+r=n} a_{pqr}x^p y^q z^r,$$

顯然，其中

(3) $$a_{pqr}=\frac{1}{p!\,q!\,r!}\,\frac{\partial^{p+q+r}U_n}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}。$$

方程(1)可以改寫成：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}。$$

利用這方程我們可以消去(3)式中關於變數 z 的高於一次的導數；例如：

$$\frac{\partial^6 U}{\partial x\partial y\partial z^4}=-\frac{\partial^4}{\partial x\partial y\partial z^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)+$$
$$+\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^6 U}{\partial x^5\partial y}+2\frac{\partial^6 U}{\partial x^3\partial y^3}+\frac{\partial^6 U}{\partial x\partial y^5}。$$

這樣，剩下來是任意的祇是那些係數 a_{pqr}，其中不含關於 z 的導數，或是祇含關於 z 的一階導數。這些係數顯知為 $a_{pq0}(p+q=n)$ 和 $a_{pq1}(p+q=n-1)$，他們一共恰有 $(2n+1)$ 個，證明完畢。

130. 球函數的顯式 現在我們要確定上節中說過的那些齊次多項式的顯式。引進球坐標：

(4) $$x=r\sin\theta\cos\varphi;\quad y=r\sin\theta\sin\varphi;\quad z=r\cos\theta。$$

這時齊 n 次調和多項式記為：

(5) $$U_n(x,y,z)=r^n Y_n(\theta,\varphi)。$$

這種滿足方程(1)的多項式通常稱爲球體函數,而 $Y_n(\theta,\varphi)$,他顯然是 $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ 的多項式,則稱爲球面函數,或簡稱 n 階球函數。我們的問題是要找出 $(2n+1)$ 個線性獨立的球函數。

首先注意一件關於方程(1)的解的簡單事實。下面的積分是其中的參數 x, y 和 z 的函數:

$$U(x,y,z)=\int_{-\pi}^{+\pi}f(z+ix\cos t+iy\sin t,t)dt, \tag{6}$$

這裏我們假設關於 x, y 和 z 的微分可以移到積分符號之內去。施行微分以後,易見對於任意的函數 $f(\tau,t)$,函數 $U(x,y,z)$ 常能滿足方程(1),祇要在積分符號下微分是合法的。實際上:

$$\varDelta U(x,y,z)=\int_{-\pi}^{+\pi}(1-\cos^2 t-\sin^2 t)f''(z+ix\cos t+iy\sin t,t)dt,$$

其中 $f''(\tau,t)$ 表示 $f(\tau,t)$ 關於 τ 的二階導數。注意 τ 是個複變數。應用公式(6)現在已經不難造出 $(2n+1)$ 個滿足方程(1)的齊 n 次多項式了。

他們是:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}(z+ix\cos t+iy\sin t)^n\cos mt\,dt,\quad (m=0,1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}(z+ix\cos t+iy\sin t)^n\sin mt\,dt\qquad (m=1,2,\cdots,n)。 \tag{8}$$

在球坐標下,利用(7)式的積分,推出如下的形式的球函數

$$\int_{-\pi}^{\pi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos(t-\varphi)]^n\cos mt\,dt=$$
$$=\int_{-\pi-\varphi}^{\pi-\varphi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi)^n\cos m(\varphi+\psi)d\psi。$$

因爲被積分函數關於 ψ 的週期是 2π,故可取任意長爲 2π 的區間作積分區間(II, 142)。這樣,上面的積分就可改寫爲:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi)^n\cos m(\varphi+\psi)d\psi。$$

展開 $\cos m(\varphi+\psi)$ 並注意 $\sin m\psi$ 是奇函數,我們可以把這球函數改寫爲:

(9) $$\cos m\varphi\int_{-\pi}^{+\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi)^n\cos m\psi\,d\psi\quad(m=0,1,\cdots,n)。$$

同樣，由積分(8)可得下列 n 個球函數：

(10) $$\sin m\varphi\int_{-\pi}^{+\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi)^n\cos m\psi\,d\psi\quad(m=1,2,\cdots,n)。$$

上列$(2n+1)$個函數(9)和(10)中包含變數 φ 的因子是 $\cos m\varphi$ 和 $\sin m\varphi$，因爲後面這些函數中的任意兩個皆在區間 $(-\pi,\ +\pi)$ 上互相正交[II, 142]，所以必定互相線性獨立，從而函數(9)和(10)亦必線性獨立。這樣，我們就造出$(2n+1)$個 n 階球函數的全部了。在(9)式和(10)式中 $\cos m\varphi$ 和 $\sin m\varphi$ 的係數都是同一個 θ 的函數。我們現在要用勒上特多項式來表示他們。

由[102]知勒上特多項式可表示爲：

(11) $$P_n(x)=\frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]。$$

再引進函數 $P_{n,m}(x)$，他可以藉勒上特多項式來表示如下：

(12) $$P_{n,m}(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{n!\,2^n}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}[(x^2-1)^n]。$$

現在要導出 $P_n(x)$ 和 $P_{n,m}(x)$ 的其他表示式。由勾犀公式知：

$$(x^2-1)^n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{(z^2-1)^n}{z-x}dz,$$

其中 C 爲包含 $z=x$ 在其內部的任意閉線路，積分沿逆時針方向進行。由這式子和(11)得：

(13) $$P_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C\frac{(z-1)^n(z+1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz。$$

現在取 C 爲中心在 $z=x$，半徑等於 $|x^2-1|$（設 $x\neq\pm1$）的圓周。這時積分變數 z 可以寫成：

$$z=x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\psi},$$

其中 $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ 取何值並不關重要，並可設 ψ 從$(-\pi)$變到$(+\pi)$。完成積分(13)中的變數變換以後，得：

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{\frac{[x-1+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\psi}][x+1+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\psi}]}{2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\psi}}\right\}^n d\psi。$$

經過一些初等的計算，並注意被積分的是個偶函數，可得：

(14)
$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi]^n d\psi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi]^n d\psi。$$

現在對 $P_{n,m}(x)$ 施行類似的計算，代替(13)式，我們有：

$$P_{n,m}(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{2^{n+1}\pi i}\int_C\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+m+1}}dz$$

經過和前面一樣的變換積分變數以後，得：

$$P_{n,m}(x)=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi]^n e^{-mi\psi}d\psi,$$

或，因 $\sin m\psi$ 爲奇函數，

(15)

$$P_{n,m}(x)=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi]^n\cos m\psi\, d\psi。$$

若在積分(14)和(15)中置 $x=\cos\theta$，即得(9)式和(10)式中的積分。注意常數因子不影響調和多項式或球函數的性質，我們就可以得到下面的結論：(2n+1) 個 n 階球函數可以寫成如下的形式：

(16)　$P_n(\cos\theta)$；$P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\varphi$；$P_{n,m}(\cos\theta)\sin m\varphi$

$(m=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

其中 $P_n(x)$ 是勒上特多項式，由(11)式決定，$P_{n,m}(x)$ 由(12)式決定。注意：以 $x=\cos\theta$ 代入 $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ 得到 $\sin^m\theta$。以任意常數乘(16)式的諸解，然後相加，即得一般形式的 n 階球函數：

(17)
$$Y_n(\theta,\varphi)=a_0P_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos m\varphi+b_m\sin m\varphi)P_{n,m}(\cos\theta)。$$

我們也可以做(16)式中各解的線性結合，改以指數函數代替三角函數，而得到下列一套 n 階的球函數以代替(16)式中的那一套。

(18)　$P_n(\cos\theta)$，$P_{n,m}(\cos\theta)e^{im\varphi}$，$P_{n,m}(\cos\theta)e^{-im\varphi}$　$(m=1, 2, \cdots, n)$。

由以上所述可知滿足拉普拉斯方程的變數(x, y, z)的一般齊 n 次多項式是 $r^nY_n(\theta, \varphi)$，其中 $Y_n(\theta, \varphi)$ 由 (17) 式決定。

131. 正交性　現在證明球函數(16)在單位球面上的正交性，並計算這些函數的平方在單位球面上的積分。首先，計算積分：

$$I_m=\int_{-1}^{+1}[P_{n,m}(x)]^2\,dx\,。$$

由這函數的定義有：

$$I_m=\int_{-1}^{+1}[P_{n,m}(x)]^2\,dx=\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\,\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\,dx,$$

其中當 $m=0$ 時得到的是勒上特多項式的平方的積分：

$$I_0=\int_{-1}^{+1}[P_n(x)]^2\,dx\,。$$

我們在[102]中曾經證明

$$(19)\qquad I_0=\int_{-1}^{+1}[P_n(x)]^2\,dx=\frac{2}{2n+1}\,。$$

在本段末了我們還要給這公式一個證明，不過在計算積分 I_m 的時候先要把這結果用一下。

施行分部積分，可得：

$$I_m=(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\,\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}\Bigg|_{x=-1}^{x=+1}-$$

$$-\int_{-1}^{+1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}\,\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\right]dx$$

或

$$(20)\qquad I_m=-\int_{-1}^{+1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}\,\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\right]dx\,。$$

但是利用[102]的(84)式不難證明函數

$$z=\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}=\frac{1}{2^nn!}\,\frac{d^{n+m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n+m-1}}$$

滿足方程

$$(1-x^2)\frac{d^{m+1}P_n(x)}{dx^{m+1}}-2mx\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}+$$

$$+(n+m)(n-m+1)\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}=0。$$

以$(1-x^2)^{m-1}$乘之，可以把他改寫爲：

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\right]=-(n+m)(n-m+1)(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}。$$

代入(20)式，得：

$$I_m=(n+m)(n-m+1)\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}dx,$$

或
$$I_m=(n+m)(n-m+1)I_{m-1}。$$

由這公式逐次將 m 減去 1，可得

$$\begin{aligned}I_m&=(n+m)(n-m+1)(n+m-1)(n-m+2)I_{m-2}=\cdots=\\&=(n+m)(n-m+1)(n+m-1)(n-m+2)\cdots(n+1)nI_0=\\&=(n+m)(n+m-1)(n+m-2)\cdots(n-m+1)I_0=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}I_0。\end{aligned}$$

由此再用(19)式的結果卽得函數 $P_{n,m}(x)$ 的平方的積分：

$$\int_{-1}^{+1}[P_{n,m}(x)]^2dx=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}。\tag{21}$$

這結果使我們能夠計算每一個 $P_{n,m}(x)$ 的平方的積分。球函數 $Y_n(\theta,\varphi)$ 可視爲在單位球面上定義的函數，θ 和 φ 是球面上的點的地理坐標，$\varphi=\text{const}$ 是經線，$\theta=\text{const}$ 是緯線。如我們所知，對於這樣選取的坐標曲線，球面上的面積單元可用下面的式子來表示[II, 59]：

$$d\sigma=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi。\tag{22}$$

現在先證明：兩個不同階的球函數 $Y_p(\theta,\varphi)$ 和 $Y_q(\theta,\varphi)$ $(p\neq q)$ 在單位球面 S 上爲正交，卽

$$\iint_S Y_p(\theta,\varphi)Y_q(\theta,\varphi)d\sigma=0。\tag{23}$$

設 v 爲這球面所包圍的實體，S 爲球面。對調和函數

$$(24)\qquad U_p = r^p Y_p(\theta, \varphi) \text{ 和 } U_q = r^q Y_q(\theta, \varphi)$$

應用格林公式[II, 193]：

$$\iint_S \left(U_p \frac{\partial U_q}{\partial n} - U_q \frac{\partial U_p}{\partial n} \right) d\sigma = \iiint_v (U_p \Delta U_q - U_q \Delta U_p) dv,$$

其中 $\Delta U_p = \Delta U_q = 0$。

在目前的情形下法線方向的導數就是關於半徑 r 的導數，故由上式及(24)式得：

$$\iint_S [q Y_p(\theta, \varphi) Y_q(\theta, \varphi) - p Y_q(\theta, \varphi) Y_p(\theta, \varphi)] d\sigma = 0,$$

因爲 $p \neq q$，由此立刻得到(23)式。

其次證明從(16)中任取兩個不同的球函數來，他們雖然階數相同，但亦必互相正交。實際上，單位球面上的積分歸結到關於 φ 在區間 $(0, 2\pi)$ 上的積分以及關於 θ 的積分。但是函數(16)所含與 φ 有關的因子是：

$$1,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \cos 2\varphi,\ \sin 2\varphi,\ \cdots,\ \cos n\varphi,\ \sin n\varphi$$

其中任意兩個因子的乘積在區間 $(0, 2\pi)$ 上的積分都等於零[II, 142]。同樣的理由，可以肯定(18)中諸函數也成一正交系統。

最後，計算前述每一函數的平方的積分。首先，取與 φ 無關的球函數 $P_n(\cos\theta)$，作他的平方在單位球面上的積分

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n^2(\cos\theta)\sin\theta \, d\theta \, d\varphi。$$

引進另一積分變數 $x = \cos\theta$ 並利用(19)式的結果，可得：

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n^2(\cos\theta)\sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx = \frac{4\pi}{2n+1}。$$

同樣，對其他的函數有：

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} [P_{n,m}(\cos\theta)]^2 \sin^2 m\varphi \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \pi \int_{-1}^{+1} [P_{n,m}(x)]^2 dx。$$

應用(21)，結果卽得：

$$
(25)\quad \begin{cases} \displaystyle\iint_S [P_n(\cos\theta)]^2 d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} \\ \displaystyle\iint_S [P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\varphi]^2 d\sigma = \frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \\ \displaystyle\iint_S [P_{n,m}(\cos\theta)\sin m\varphi]^2 d\sigma = \frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \end{cases}
$$

以後在研究球面上任一已給函數關於球函數的展開式的問題時我們要用到這些公式來求解。

現在證明公式(19)。利用勒上特多項式的定義(11),可寫:

$$
I_0 = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{+1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx。
$$

施行分部積分,得:

$$
I_0 = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left[\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\right]_{x=-1}^{x=+1} -
$$

$$
-\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{+1}\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}\cdot\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,dx。
$$

多項式$(x^2-1)^n$以$x=\pm1$爲n重零點,他的$n-1$階導數以$x=\pm1$爲一重零點[I, 186],因此上式右邊被積分出來的項等於零。繼續施行分部積分$(n-1)$次,卽得

$$
I_0 = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{+1}\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}\cdot(x^2-1)^n\,dx。
$$

但
$$
\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}} = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^{2n}+\cdots) = (2n)!,
$$

因此
$$
I_0 = (-1)^n\frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{n!\,2^{2n}}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n\,dx。
$$

由 $x=\cos\varphi$ 引進新的積分變數 φ,得:

$$
I_0 = \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{n!\,2^{2n}}\int_0^{\pi}\sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi =
$$

$$
= \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{n!\,2^{2n}}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi,
$$

然後利用[I, 100]的(28)式的結果，卽得(19)式。

132. 勒上特多項式　我們現在更詳細地來研究勒上特多項式。首先，注意：如果應用關於 n 階導數的萊伯尼玆公式於定義式(11)中的乘積 $(x^2-1)^n=(x+1)^n(x-1)^n$，則得：

$$P_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\Big[(x+1)^n\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}+\frac{n}{1}\frac{d(x+1)^n}{dx}\frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}}+\\+\cdots+\frac{d^n(x+1)^n}{dx^n}\cdot(x-1)^n\Big]。$$

注意

$$\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}=n!\text{ 和 }\frac{d^k(x-1)^n}{dx^k}\Big|_{x=1}=0\text{ 當 }k<n$$

則由前式立刻可得

$$P_n(1)=1。\tag{26}$$

現在我們改用一種特別的方法——母函數的方法——來研究勒上特多項式的其他性質。這種方法我們以後還要用來研究其他的特殊函數。

在單位球的北極 N 置一單位正電 $(+1)$，設 M 爲一動點，其球坐標爲 r, θ, φ。這單位正電所產生的庫侖電場在 M 點的電勢爲：

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}},\tag{27}$$

其中 d 是 M 點和北極 N 的距離。

函數(27)是變數 r 在 $r=0$ 這點的正則函數，故可依照 r 的正整數冪展開爲：

$$\frac{1}{d}=a_0(\theta)+a_1(\theta)r+a_2(\theta)r^2+\cdots,\tag{28}$$

其中諸係數都是 $\cos\theta$ 的多項式。應用牛頓二項式公式於函数

$$\frac{1}{d}=[1+(r^2-2r\cos\theta)]^{-\frac{1}{2}},$$

然後把含 r 冪次相同的項集在一起，卽可得出(28)式中諸係數的準確

數值。但是我們却將用另一種方法來求他們。

函數(27)可用直角坐標表示爲：

$$\frac{1}{d}=[1+(x^2+y^2+z^2-2z)]^{-\frac{1}{2}}。\tag{29}$$

若應用牛頓公式於函數(29)，然後在所得的無窮級數中把關於 x，y 和 z 次數相同的項集在一起，就可以得到級數(28)，就是說，級數(28)的每一項都是 x、y 和 z 的齊次多項式。但我們在[II，119]中知道函數 $\frac{1}{d}$ 是拉普拉斯方程的解，因此級數(28)中的每一項都是拉普拉斯方程的解，即這級數的每一項都是球體函數。但是他們都和 φ 沒有關係，所以必定可以表示爲 $c_nP_n(\cos\theta)$ 的形式，其中 c_n 是待定常數。這樣，就有

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}=c_0+c_1P_1(\cos\theta)r+c_2P_2(\cos\theta)r^2+\cdots$$

置 $\theta=0$，由(26)式，得：

$$\frac{1}{1-r}=c_0+c_1r+c_2r^2+\cdots,$$

由此立刻知道對任一 n 有 $c_n=1$。這樣就將基勢依照 r 的冪次展開爲：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}=1+P_1(\cos\theta)r+P_2(\cos\theta)r^2+\cdots\tag{30}$$

以 x 代 $\cos\theta$，z 代 r，可得：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n。\tag{31}$$

這式子可以用來定義勒上特多項式，即：勒上特多項式 $P_n(x)$ 就是函數

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\tag{32}$$

依照 z 的正整數冪展開時 z^n 的係數。換言之，函數(32)是勒上特多項式的母函數。

現在決定冪級數(31)的收斂半徑。函數(32)的奇異點是那些使根號內的式子等於零的 z 的數值。解對應的二次方程得到下面兩個根：

(33) $$z=x\pm\sqrt{x^2-1}=x\pm\sqrt{1-x^2}\,i。$$

因為 $x=\cos\theta$，不妨假設 x 是實數，且在區間 $-1<x<+1$ 中。這時(33)中兩根是共軛複數，他們的模的平方都等於：

$$x^2+(\sqrt{1-x^2})^2=1。$$

當 $x=\pm1$ 時(33)中兩根重合，都等於 ±1。因此在 $-1\leqslant x\leqslant +1$ 的條件下函數(32)的奇異點和原點距離為 1，所以級數(31)當 $|z|<1$ 時收斂。特別，展開式(30)當 $r<1$ 時有效，卽對所有位於單位球內部的點都成立。對於單位球外部的點我們可以得到另一展開式。實際上，當 $r>1$ 時函數(27)可以改寫為：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{1}{r}\cos\theta+\left(\frac{1}{r}\right)^2}}。$$

這時 $\frac{1}{r}<1$，故應用以前的結果可得基勢(27)在單位球外部的展開式：

(34) $$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}。$$

這級數中的每一項在球的外部沒有奇異點，且在無限遠點都等於零。

直到現在我們都祇討論單位球。對於任意半徑 R 的球可以將 R^2 或 r^2 拿到根號外面而得：

(35) $$\frac{1}{\sqrt{R^2-2rR\cos\theta+r^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\frac{r^n}{R^{n+1}},\qquad (r<R)$$

(36) $$\frac{1}{\sqrt{R^2-2rR\cos\theta+r^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\frac{R^n}{r^{n+1}}。\qquad (r>R)$$

由(31)式容易導出勒上特多項式的一些基本性質。關於 z 微分這式子，然後以 $(1-2xz+z^2)$ 乘之，得：

$$\frac{x-z}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=(1-2xz+z^2)\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)z^{n-1}$$

或
$$(x-z)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n=(1-2xz+z^2)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)z^{n-1}\text{。}$$

由此比較 z 的同次冪的係數卽得勒上特多項式的遞推公式：

(37)
$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$
$$(n=1,2,3,\cdots)$$
$$P_1(x)-xP_0(x)=0\text{。}$$

同樣，關於 x 微分(31)式，然後以 $(1-2xz+z^2)$ 乘之，比較 z 的同次冪的係數，卽得：

(38)
$$P_n(x)=\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}+\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}-2x\frac{dP_n(x)}{dx},$$

或由(37)式消去 $P_{n+1}(x)$，得：

(39)
$$x\frac{dP_n(x)}{dx}-\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}=nP_n(x)\text{。}$$

由(38)和(39)兩式消去 $x\frac{dP_n(x)}{dx}$，得：

(40)
$$\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}-\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}=(2n+1)P_n(x)\text{。}$$

若置 $P_{-1}(x)=0$，則上式當 $n=0$ 時也成立。依次令 n 等於 0, 1, 2, $\cdots$, n，然後將各式相加，卽得：

(41)
$$P_0(x)+3P_1(x)+\cdots+(2n+1)P_n(x)=\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}+\frac{dP_n(x)}{dx}\text{。}$$

在(40)式中改 n 爲 $n-2k+1$，得：

$$\frac{dP_{n-2k+2}(x)}{dx}-\frac{dP_{n-2k}(x)}{dx}=(2n-4k+3)P_{n-2k+1}(x)\text{。}$$

關於 k 從 1 加到 N，其中 $N=\frac{1}{2}n$ 當 n 爲偶數，$N=\frac{n+1}{2}$ 當 n 爲奇數，得：

(42) $$\frac{dP_n(x)}{dx}=\sum_{k=1}^{N}(2n-4k+3)P_{n-2k+1}(x)。$$

由定義式(11)立刻知道當 n 爲偶數時 $P_n(x)$ 祇含 x 的偶數冪，當 n 爲奇數時 $P_n(x)$ 祇含 x 的奇數冪。同樣，由這式子容易得到：

(43) $$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n};\quad P_{2n+1}(0)=0;$$

$$P_n(-1)=(-1)^n。$$

應用牛頓二項式公式，得：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-e^{i\theta}r}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-e^{-i\theta}r}}=$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}e^{in\theta}r^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2m-1)}{2\cdot4\cdots2m}e^{-im\theta}r^m\right),$$

其中對應於 $n=0$ 和 $m=0$ 的項都等於1。將右邊兩級數相乘，然後和左邊的函數的展開式(30)比較 r 的同次冪的係數，可得勒上特多項式的如下的展開式：

(44) $$P_n(\cos\theta)=a_0a_n\cos n\theta+a_1a_{n-1}\cos(n-2)\theta+\cdots+a_na_0\cos n\theta,$$

其中所有的係數 a_k 都是正的，其值由下式決定：

(45) $$a_0=1;\quad a_k=\frac{1\cdot3\cdots(2k-1)}{2\cdot4\cdots2k}。\qquad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

由此立刻可得：

(46) $$|P_n(\cos\theta)|\leqslant a_0a_n+a_1a_{n-1}+\cdots+a_na_0=P_n(1)=1。$$

由公式(37)可以逐步決定勒上特多項式。最先五個多項式爲：

(47) $$\begin{cases}P_0(x)=1;\quad P_1(x)=x;\quad P_2(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-1),\\[2ex] P_3(x)=\dfrac{1}{2}(5x^3-3x);\quad P_4(x)=\dfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)。\end{cases}$$

設 $f(x)$ 是在區間 $(-1,\ +1)$ 中所定義的函數，那末就發生一個問題：是否可將 $f(x)$ 展開爲勒上特多項式的級數：

(48) $$f(x)=a_0+a_1P_1(x)+a_2P_2(x)+\cdots$$

和三角級數的理論一樣，利用 $P_n(x)$ 的正交性以及公式(19)，易知係數 a_n 應由下式決定：

$$(49)\qquad a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)P_n(x)dx。$$

可證對如此選取的係數 a_n 級數(48)在區間 $(-1, +1)$ 中爲收斂，其和等於 $f(x)$，祇要 $f(x)$ 滿足某些相當一般的條件。

133. 按照球函數展開　每一在任意半徑的球面上定義的函數必爲這球面上的地理坐標 θ 和 φ 的函數，因此可以記爲 $f(\theta, \varphi)$。假設他可以按照球函數展開，卽可在球面上展開成一個和福里哀級數類似的級數：

$$(50)\quad f(\theta, \varphi)=a_0^{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{a_0^{(n)}P_n(\cos\theta)+ \\ +\sum_{m=1}^{n}(a_m^{(n)}\cos m\varphi+b_m^{(n)}\sin m\varphi)P_{n,m}(\cos\theta)\Big\}。$$

利用球函數的正交性以及公式(25)，像在福里哀級數中一樣，可得這級數的係數的值爲：

$$(51)\quad \begin{cases} a_m^{(n)}=\dfrac{2n+1}{2\delta_m\pi}\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!}\displaystyle\iint_S f(\theta, \varphi)P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\varphi\, d\sigma \\ b_m^{(n)}=\dfrac{2n+1}{2\delta_m\pi}\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!}\displaystyle\iint_S f(\theta, \varphi)P_{n,m}(\cos\theta)\sin m\varphi\, d\sigma \end{cases}$$

$$[\delta_m=2 \text{ 當 } m=0,\ \delta_m=1 \text{ 當 } m>0;\ P_{n,0}(x)=P_n(x)]。$$

嚴格說來，這種議論祇是決定級數(50)中諸係數的一種初步想法。我們還應該把(51)式中諸係數的值代入級數(50)，然後證明當函數 $f(\theta,\varphi)$ 在某種假設之下這級數爲收斂，且其和等於 $f(\theta, \varphi)$。這些我們留到下一段中去說。

首先解釋球函數應該滿足的幾個具積分形式的關係。假設 S_R 是半徑爲 R 的球面，$Y_n(\theta, \varphi)$ 是一個 n 階球函數。M 是球內部一點，其球坐標爲(r, θ, φ)，則

$$U_n(M)=r^n Y_n(\theta,\varphi)$$

是個調和函數,對他應用格林公式 [II, 193],得:

$$U_n(M)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_R}\left(\frac{\partial U_n}{\partial\nu}\frac{1}{d}-U_n\frac{\partial\frac{1}{d}}{\partial\nu}\right)ds, \tag{52}$$

其中 d 是球面上變動點 M' 和 M 的距離,ds 是球面上的面積單元,ν 是球面 S_R 的外法線方向,故這時 $\frac{\partial}{\partial\nu}=\frac{\partial}{\partial R}$。

顯然
$$\frac{1}{d}=\frac{1}{\sqrt{R^2-2Rr\cos\gamma+r^2}},$$

其次,由(36)有:

$$\frac{1}{d}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\cos\gamma)\frac{r^k}{R^{k+1}}\qquad(r<R),$$

因此
$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{d}\right)=\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{d}\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)P_k(\cos\gamma)\frac{r^k}{R^{k+2}}$$

又
$$\frac{\partial U_n}{\partial\nu}=nR^{n-1}Y_n(\theta,\varphi)。$$

在這些公式中 γ 是動徑 OM 和 OM' 間的交角。把這些結果代入(52)式,再置 $R=1$,即得:

$$r^nY_n(\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\Big\{nY_n(\theta',\varphi')\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\cos\gamma)r^k+$$
$$+Y_n(\theta',\varphi')\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)P_k(\cos\gamma)r^k\Big\}d\sigma,$$

其中 θ' 和 φ' 表示單位球面上動點 M' 的地理坐標。上式中兩級數關於 θ' 和 φ' 為一致收斂,因為 $r<1$,又勒上特多項式滿足不等式(46)的緣故。施行逐項積分,即得:

$$r^nY_n(\theta,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{4\pi}\iint\limits_{S}(k+n+1)Y_n(\theta',\varphi')P_k(\cos\gamma)d\sigma。$$

由這式子立刻知道右邊的級數除了對應於 $k=n$ 的那一項以外其餘各

項都應等於零。這樣，我們就得到下列在球函數的應用方面很重要的積分公式：

(53) $$\iint_S Y_n(\theta',\varphi')P_m(\cos\gamma)d\sigma=0 \qquad \text{當 } m\neq n.$$

(54) $$\iint_S Y_n(\theta',\varphi')P_n(\cos\gamma)d\sigma=\frac{4\pi}{2n+1}Y_n(\theta,\varphi).$$

現在再導入一個公式，他通過 θ, φ, θ' 和 φ' 的三角函數來表示 $\cos\gamma$。為此，引單位球的兩條半徑 OM'' 和 OM'，其末端 M'' 和 M' 的地理坐標為 (θ,φ) 和 (θ',φ')。這兩半徑在坐標軸上的投影顯知為

$\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, $\cos\theta$ 和 $\sin\theta'\cos\varphi'$, $\sin\theta'\sin\varphi'$, $\cos\theta'$,

而這兩半徑交角的餘弦可以用這些投影的乘積的和來表示，即得

(55) $$\cos\gamma=\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')+\cos\theta\cos\theta'.$$

再回到級數(50)。若這級數一致收斂，且其和等於 $f(\theta,\varphi)$，則這級數的係數可表示如(51)式，和三角級數論中一樣。現在把級數(50)中所有階數相同的球函數都併成一項，即置：

(56) $$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\theta,\varphi).$$

把上式中的 θ 和 φ 改為 θ' 和 φ'，以 $P_n(\cos\gamma)$ 乘等式兩邊，然後關於 θ' 和 φ' 積分，則由(53)和(54)兩式的結果可以得到下一表示級數(56)的一般項的公式：

(57) $$Y_n(\theta,\varphi)=\frac{2n+1}{4\pi}\iint_S f(\theta',\varphi')P_n(\cos\gamma)d\sigma.$$

這公式決定級數(50)中所有階數相同的球函數的和的數值。

以(51)式中諸係數的數值代入(50)式中，得：

$$Y_n(\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2n+1}{2\delta_m\pi}\Big[\cos m\varphi\iint_S f(\theta',\varphi')\cos m\varphi' P_{n,m}(\cos\theta')d\sigma+$$
$$+\sin m\varphi\iint_S f(\theta',\varphi')\sin m\varphi' P_{n,m}(\cos\theta')d\sigma\Big]P_{n,m}(\cos\theta)$$

或

(58)

$$Y_n(\theta,\varphi)=\iint_S f(\theta',\varphi')\sum_{m=0}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2n+1}{2\delta_m\pi}P_{n,m}(\cos\theta')P_{n,m}(\cos\theta)\cos m(\varphi'-\varphi)d\sigma。$$

比較(57)式和(58)式，得：

(59)

$$\iint_S f(\theta',\varphi')\Big[P_n(\cos\gamma)-\sum_{m=0}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2}{\delta_m}P_{n,m}(\cos\theta')P_{n,m}(\cos\theta)\cos m(\varphi'-\varphi)\Big]d\sigma=0。$$

嚴格說來，這式子祇當 $f(\theta,\varphi)$ 是一致收斂級數 (50) 的和時纔成立。特別，當級數(50)退化爲有限和時(59)式自然成立。注意：若取 $M''(\theta,\varphi)$ 爲極，則角度 γ 就是地理坐標中的緯度。這樣，$r^nP_n(\cos\gamma)$ 就是齊 n 次調和多項式，從而 $P_n(\cos\gamma)$ 是變數 θ' 和 φ' 的 n 階球函數。我們看到在 (59) 式的方括弧中是有限個球函數的和，故不妨設 $f(\theta',\varphi')$ 就等於這有限個球函數的和。對於這樣選取的函數，(59)式表示方括弧中函數的平方的積分等於零，因此這方括弧中的函數也應等於零，即：

(60) $$P_n(\cos\gamma)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2}{\delta_m}P_{n,m}(\cos\theta')P_{n,m}(\cos\theta)\cos m(\varphi'-\varphi)。$$

這式子通常稱爲勒上特多項式的加法公式。

134. 收斂性的證明 現在證明在球面上任一滿足某些條件的函數 $f(\theta,\varphi)$ 必可按照球函數展開爲級數(56)。

由(57)式的結果知道級數(56)的最先$(n+1)$項的和是：

$$S_n=\frac{1}{4\pi}\iint_S f(\theta',\varphi')\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(\cos\gamma)d\sigma。$$

置北極於球面上原來地理坐標爲 (θ,φ) 的點，於是就導入新的地理坐標 γ 和 β。這時函數 $f(\theta',\varphi')$ 在新坐標系統下變爲 γ 和 β 的函數 $F(\gamma,\beta)$，因此

(61) $$S_n=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F(\gamma,\beta)\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(\cos\gamma)\sin\gamma\,d\gamma\,d\beta。$$

藉

(62) $$\Phi(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\gamma,\beta)d\beta$$

導入函數 $\Phi(\gamma)$，他表示在新坐標系統之下函數 $F(\gamma,\beta)$ 在緯度爲 γ 的緯線上的平均值。

導入另一變數 $x=\cos\gamma$，置

(63) $$\Phi(\gamma)=\Psi(x)。$$

完成(61)式中關於 β 的積分，即得

$$S_n=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\Phi(\gamma)\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(\cos\gamma)\sin\gamma\,d\gamma,$$

或

$$S_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\Psi(x)\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x)dx,$$

由(41)式得

$$S_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\Psi(x)\left(\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}+\frac{dP_n(x)}{dx}\right)dx。$$

假設函數 $f(\theta, \varphi)$ 是如此取法，使得 $\Psi(x)$ 在區間 $(-1, +1)$ 中有連續的導數。將上式施行分部積分，得：

$$S_n=\frac{1}{2}\Big[\Psi(x)[P_{n+1}(x)+P_n(x)]\Big]_{x=-1}^{x=+1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}[P_{n+1}(x)+P_n(x)]\Psi'(x)dx,$$

因

$$P_n(1)=P_{n+1}(1)=1;\ P_n(-1)=-P_{n+1}(-1)=(-1)^n,$$

故得

$$S_n=\Psi(1)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}[P_{n+1}(x)+P_n(x)]\Psi'(x)dx。\tag{64}$$

現在來尋式右邊第一項 $\Psi(1)$ 的數值。由(62)和(63)有：

$$\Psi(1)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(0, \beta)d\beta。\tag{65}$$

但是當 $\gamma=0$ 時對於任何 β，$(0, \beta)$ 常爲球的北極，但原來的地理坐標是 (θ, φ)。換言之，$F(0, \beta)=f(\theta, \varphi)$ 與 β 無關，由上式即得

$$\Psi(1)=f(\theta, \varphi)。$$

這樣，(61)式便可改寫爲：

$$S_n=f(\theta, \varphi)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}[P_{n+1}(x)+P_n(x)]\Psi'(x)dx。\tag{66}$$

我們要證明的是

$$\lim_{n\to\infty}S_n=f(\theta, \varphi),$$

即需證明當 $n\to\infty$ 時 (66) 式中的積分趨於零爲極限。假設 M 是連續函數 $\Psi'(x)$ 的絕對值在區間 $(-1, +1)$ 中的最大值，則上述積分的絕對值必小於

$$\frac{M}{2}\int_{-1}^{+1}|P_{n+1}(x)|dx+\frac{M}{2}\int_{-1}^{+1}|P_n(x)|dx。$$

現在我們祇要證明當 $n\to\infty$ 時積分

$$\int_{-1}^{+1}|P_n(x)|dx\tag{67}$$

趨於零爲極限好了。應用布業可夫斯基不等式 [III₁, 29]，得：

$$\left(\int_{-1}^{+1}|P_n(x)|dx\right)^2\leqslant\int_{-1}^{+1}P_n^2(x)dx\int_{-1}^{+1}1^2\,dx=2\int_{-1}^{+1}P_n^2(x)dx,$$

由(19)式知

$$\int_{-1}^{+1}|P_n(x)|dx\leqslant\frac{2}{\sqrt{2n+1}}。$$

由此立刻知道當 $n\to\infty$ 時積分(67)的極限爲零。

上述按照球函數展開的定理的證明方法係取自維柏斯脫塞格的書"理論物理學中的偏微分方程"中。任一滿足上述一般條件的函數($\Psi(x)$有連續導數)必可按照球函數展開的事實說明球函數在單位球面成一封閉系統[II, 55]。球函數系統的封閉性首先爲 A. M. 廖普諾夫所證明(1899 年)。

135. 球函數和邊值問題的關係 現在說明球函數的理論和微分方程論中幾個邊值問題之間的關係。在球坐標下的拉普拉斯方程[II, 119]爲:

$$(68)\qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=0。$$

現在要求這方程的這樣的解,他是一個 r 的函數與一個 θ 和 φ 的函數的乘積:

$$U=f(r)Y(\theta,\varphi)。$$

代入方程(68):

$$Y(\theta,\varphi)\frac{d}{dr}[r^2f'(r)]+f(r)\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right\}=0;$$

分離變數後可以改寫爲:

$$\frac{\frac{d}{dr}[r^2f'(r)]}{f(r)}=-\frac{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}}{Y}。$$

等式左邊祇含 r,等式右邊祇含 θ 和 φ,因此兩邊都應等於同一個常數。記這常數爲 λ,則得兩方程:

$$(69)\qquad r^2f''(r)+2rf'(r)-\lambda f(r)=0$$

和

$$(70)\qquad \Delta_1 Y+\lambda Y=0,$$

其中

$$(71)\qquad \Delta_1 Y=\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]。$$

由(5)式可知 $f(r)$ 必等於 r^n，這樣，祇須研究方程(70)好了。如我們所知，函數 $Y(\theta,\varphi)$ 是三角多項式，故在整個單位球面上，即對任何 θ 和 φ 的數值，應爲有限且連續，特別，當 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$，$\sin\theta=0$ 時亦然。現在我們研究下一邊值問題：求參數 λ 的值使得方程(70)有在整個單位球面上爲連續的解，並求這種解。問題的第一部分並不困難，因爲我們知道 $f(r)$ 應等於 r^n，代入方程(69)，即得無限多個 λ 的數值，即：

$$(72)\qquad \lambda_n=n(n+1)\qquad (n=0,1,2,\cdots)。$$

這時方程

$$(73)\qquad r^2f_n''(r)+2rf_n'(r)-n(n+1)f_n(r)=0$$

的一解爲 $f_n(r)=r^n$，另一解爲 $f_n(r)=r^{-n-1}$。以 $\lambda=n(n+1)$ 代入方程(70)，得到球函數應滿足的方程：

$$(74)\qquad \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2}\right]+n(n+1)Y_n=0。$$

在目前的情形下特徵值 $\lambda_n=n(n+1)$ 對應於 $(2n+1)$ 個特徵函數，即(16)式中的 $(2n+1)$ 個 n 階球函數。因爲球函數在單位球面上成封閉系統，所以他們就是方程(70)的特徵函數的全部。以(16)式中的函數代入(74)式，並置 $x=\cos\theta$，即得 $P_{n,m}(x)$ 所應滿足的二階微分方程：

$$(75)\qquad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_{n,m}(x)}{dx}\right]+\left(\lambda_n-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P_{n,m}(x)=0。$$

當 $m=0$ 時即得勒上特多項式 $P_n(x)$ 所應滿足的方程。特徵值和對應的特徵函數 $P_{n,m}(x)$ 是下列邊值問題的解：求方程(75)中 λ_n 的數值使他有在閉區間 $-1\leqslant x\leqslant +1$ 中爲有界的解。注意：方程(75)在奇異點 $x=\pm1$ 的判定方程爲 $\rho(\rho-1)+\rho-\frac{m^2}{4}=0$，兩根爲 $\rho=\pm\frac{m}{2}$。但和 $\rho=-\frac{m}{2}$ 對應的解在奇異點的值爲無窮大。上述邊值問題歸結到：求 λ_n

的數值使得在 $x=-1$ 和 $\rho=\frac{m}{2}$ 對應的解在 $x=+1$ 仍舊對應於 $\rho=\frac{m}{2}$。而這問題的解即 $\lambda_n=n(n+1)$，他所對應的特徵函數由(12)式決定。

球函數的正交性和他們是上述邊值問題的解有密切的關係。同樣，諸函數 $P_{n,m}(x)$ 在線段$(-1, +1)$中亦具正交性：

$$\int_{-1}^{+1} P_{p,m}(x)P_{q,m}(x)dx=0 \qquad \text{當 } p\neq q。 \tag{76}$$

這式的證明基於方程(75)，其程序和我們在[102]中證明勒上特多項式的正交性完全一樣。還要注意一件和球函數的理論有關的事實：利用方程(73)的解 $f_n(r)=r^n$ 可得拉普拉斯方程的解 $r^nY_n(\theta,\varphi)$，這就是 n 次調和多項式。如果利用第二個解 $f_n(r)=r^{-n-1}$，那末得到的函數是：

$$\frac{Y_n(\theta,\varphi)}{r^{n+1}}, \tag{77}$$

其中 $Y_n(\theta,\varphi)$ 是 n 階球函數，這函數(77)也是拉普拉斯方程的解。當 $r=0$ 時他的值是無窮大，顯然，他不是 x, y 和 z 的多項式。

136. 狄義赫利問題和諾伊曼問題 凡理論物理學的問題牽涉到拉普拉斯方程，並且討狄的是球面的場合時，就要用到球函數。茲以我們從前在[II, 192]中已經說過的關於球面的狄義赫利和諾伊曼問題爲例。所謂狄義赫利內部問題就是：已給在半徑爲 R 的球面上的邊值，要求這球內部的調和函數。我們將邊值按照球函數展開：

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\varphi)。 \tag{78}$$

設 r 爲球內動點與球心的距離，以 $\left(\frac{r}{R}\right)^n$ 乘這級數的一般項，得到另一級數

$$U(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\varphi)\left(\frac{r}{R}\right)^n。 \qquad (r<R) \tag{79}$$

因爲 $\frac{1}{R^n}Y_n(\theta,\varphi)r^n$ 是調和多項式，所以函數(79)在球的內部爲

調和函數，而且當 $r=R$ 時級數(79)變爲級數(78)，故這調和函數滿足已給的邊值條件。

現在再看狄義赫利外部問題：要決定一個球外部的調和函數，在無限遠點等於零，而在球面上具已給的邊值(78)。因爲 $Y_n(\theta,\varphi)r^{-n-1}$ 是調和函數，在球的外部沒有奇異點，且在無限遠點等於零，故得狄義赫利外部問題的解爲：

$$U(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\theta,\varphi)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}. \tag{80}$$

現在再看諾伊曼內部問題的解：要決定球內部的調和函數 $U(r,\theta,\varphi)$，當他在球面上法線方向的導數

$$\frac{\partial U}{\partial\nu}=f(\theta,\varphi)\qquad (r=R) \tag{81}$$

爲已給時。

我們知道調和函數的法線方向導數的積分應該等於零[II, 194]：

$$\iint_S\frac{\partial U}{\partial\nu}d\sigma=0$$

即已給條件(81)中的函數 $f(\theta,\varphi)$ 應滿足下面的關係：

$$\iint_S f(\theta,\varphi)d\sigma=0. \tag{82}$$

由(56)式，(57)式以及當 $n=0$ 時 $P_n(\cos\gamma)$ 是個常數，可知(82)式的意思就是說：在 $f(\theta,\varphi)$ 的球函數展開式中沒有零階的球函數。因此就有：

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(\theta,\varphi). \tag{83}$$

由此易知諾伊曼問題的解是

$$U(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}Y_n(\theta,\varphi)\frac{r^n}{R^{n-1}}+C, \tag{84}$$

其中 C 爲任意常數。

實際上，這級數定義一個調和函數，而現在沿法線方向微分就是關

於 r 微分。易見關於 r 微分級數(84)，再令 $r=R$，卽得級數(83)，卽調和函數 $U(r,\theta,\varphi)$ 滿足條件(81)。

在諾伊曼外部問題的場合條件(81)中的函數 $f(\theta,\varphi)$ 不一定要滿足條件(82)，因此他的展開式具有一般的形式(78)。易見這時問題的解可用下面的級數表示：

$$U(r,\theta,\varphi)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}Y_n(\theta,\varphi)\frac{R^{n+2}}{r^{n+1}}, \tag{85}$$

這時法線的方向 ν 與半徑 r 的方向相同。

現在考察諾伊曼外部問題的一個特別情形，假設半徑為 R 的球在無界的液體中移動，這液體在無限遠點是靜止的，球是沿着 Z 軸移動的，速度為 a。取一與球同時移動的坐標系統，其原點卽球心，x, y 和 z 軸都和原來的坐標軸方向相同。這時在球面上液體速度的法線方向支量為：

$$\frac{az}{r}=-a\cos\theta。$$

假設液體的運動狀況是固定不變的，並且有速勢，那末我們就可由下列諸條件尋求這個函數 U：(1) U 在球的外部是調和函數；(2)在無限遠點速度的各支量，卽 U 沿各坐標軸的導數，等於零。(3)函數 U 在球面上應滿足

$$\frac{\partial U}{\partial r}=-a\cos\theta。$$

現在 $f(\theta,\varphi)=-a\cos\theta$，回憶勒讓特多項式的定義，有：

$$f(\theta,\varphi)=-aP_1(\cos\theta),$$

就是說，$f(\theta,\varphi)$ 是個一階的球函數。問題的解答是

$$U(r,\theta,\varphi)=\frac{a}{2}P_1(\cos\theta)\frac{R^3}{r^2}=\frac{aR^3}{2r^2}\cos\theta。$$

137. 質體的勢函數 假設空間一有限體積 V 中充滿着密度為 $\rho(M')$ 的物質。由於這種質量的分佈而產生的勢函數可以用一個三重積分來表示：

$$U(M)=\iiint_V\frac{\rho(M')}{d}dV, \tag{86}$$

其中 d 是 V 中變動點 M' 和要測定勢函數的值的點 M 之間的距離。假設 O 是原點，向徑

$$r=|\overline{OM}|,\quad r'=|\overline{OM'}|,$$

又 γ 是這兩向徑間的夾角。取 M 為相當遠的點，使 r 的數值大於 r' 的最大值。由[132]我們有如下的展開式：

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\gamma+r'^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\gamma)\frac{r'^n}{r^{n+1}},$$

因 $|P_n(\cos\gamma)|<1$，上式右邊的級數關於 r' 爲一致收斂，代入(86)式的積分中，卽得 $U(M)$ 依照 r 的負整數冪的展開式：

$$U(M)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Y_n(\theta,\varphi)}{r^{n+1}},\tag{87}$$

其中

$$Y_n(\theta,\varphi)=\iiint\limits_V \rho(M')r'^n P_n(\cos\gamma)dV。\tag{88}$$

現在決定展開式(87)中的前三項。回憶最先三個勒讓特多項式的數值以及下面的公式：

$$\cos\gamma=\frac{xx'+yy'+zz'}{rr'},$$

可得：

$$P_0(\cos\gamma)=1;\quad r'P_1(\cos\gamma)=\frac{xx'+yy'+zz'}{r}$$

$$r'^2P_2(\cos\gamma)=\frac{1}{2}\,\frac{3(xx'+yy'+zz')^2-r'^2r^2}{r^2}。$$

代入(88)式，得：

$$Y_0(\theta,\varphi)=\iiint\limits_V \rho(M')dV=m,$$

就是說，展開式(87)中 $\frac{1}{r}$ 的係數等於體積 V 中所包含的總質量 m。其次，

$$Y_1(\theta,\varphi)=\iiint\limits_V \rho(M')r'P_1(\cos\gamma)dV=$$

$$=\frac{x}{r}\iiint\limits_V \rho(M')x'dV+\frac{y}{r}\iiint\limits_V \rho(M')y'dV+\frac{z}{r}\iiint\limits_V \rho(M')z'dV。$$

上記諸積分表示質量 m 和重心的諸坐標的乘積。若取重心爲原點，則顯然有 $Y_1(\theta,\varphi)=0$。最後，計算 $Y_2(\theta,\varphi)$。爲此，設運質量關於坐標軸的轉動慣量爲：

$$A=\iiint\limits_V \rho(M')(y'^2+z'^2)dV;\quad B=\iiint\limits_V \rho(M')(z'^2+x'^2)dV;$$

$$C=\iiint\limits_V \rho(M')(x'^2+y'^2)dV,\tag{89}$$

還有關於坐標軸的離心力矩爲：

$$D=\iiint\limits_V \rho(M')y'z'dV;\qquad E=\iiint\limits_V \rho(M')z'x'dV;$$

$$F=\iiint\limits_V \rho(M')x'y'dV。\tag{90}$$

可以證明適當的安置坐標系統以後常可使諸離心力矩(90)都等於零，證略。現在假設坐標軸已經如此安置好了，那末以 $r'^2P_2(\cos\gamma)$ 的數值代入(88)式，卽得：

$$Y_2(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}\frac{(B+C-2A)x^2+(C+A-2B)y^2+(A+B-2C)z^2}{r^2},$$

對勢函數 $U(M)$ 我們有準確到 $\frac{1}{r^3}$ 的展開式:

$$U(M)=\frac{m}{r}+\frac{1}{2}\frac{(B+C-2A)x^2+(C+A-2B)y^2+(A+B-2C)z^2}{r^5}+\cdots \tag{91}$$

將直角坐標 x, y 和 z 改以球坐標代入,即得:

$$U(M)=\frac{m}{r}+ \tag{92}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{(B+C-2A)\cos^2\varphi\sin^2\theta+(C+A-2B)\sin^2\varphi\sin^2\theta+(A+B-2C)\cos^2\theta}{r^3}+\cdots$$

133. 球殼的勢函數 假設在半徑為 R 的球面 S_R 上分佈有質量,其曲面密度為 $\rho(M')$。則由這單球殼面產生的勢函數 $U(M)$ 可用球面積分

$$U(M)=\iint\limits_{S_R}\frac{\rho(M')}{d}\,ds \tag{93}$$

來表示,其中 d 是 M 點和球面上的變動點 M' 間的距離。$\frac{1}{d}$ 的展開式將視 M 在球 S_R 的內部或外部而有不同。

首先假設 $r<R$, 由[132]有

$$\frac{1}{d}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\gamma)\frac{r^n}{R^{n+1}}, \tag{94}$$

其中 γ 是從球心出發的兩向徑 $\overline{OM}$ 和 $\overline{OM'}$ 間的交角。密度 $\rho(M')$ 應設為球面上地理坐標的已給函數 $f(\theta',\varphi')$。

以展開式(94)代入積分(93),記住 $ds=R^2d\sigma=R^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'$ 即得:

$$U(M)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{R^{n-1}}\iint\limits_{S}f(\theta',\varphi')P_n(\cos\gamma)d\sigma. \tag{95}$$

上記積分與 $f(\theta,\varphi)$ 關於球函數的展開式中的項有顯著的關係,即若

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\theta,\varphi), \tag{96}$$

則如我們所知，

$$Y_n(\theta,\varphi)=\frac{2n+1}{4\pi}\iint_S f(\theta',\varphi')P_n(\cos\gamma)d\sigma,$$

從而(95)式可以改寫如下：

$$U(M)=4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{(2n+1)R^{n-1}}Y_n(\theta,\varphi)。\qquad (r<R) \tag{97}$$

同樣，利用展開式(36)，可得：

$$U(M)=4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^{n+2}}{(2n+1)r^{n+1}}Y_n(\theta,\varphi)。\qquad (r>R) \tag{98}$$

由這些展開式可知勢函數 $U(M)$ 的幾點性質。首先，注意當 M 點在球面上的時候，展開式(97)和(98)相符合。這時應置 $r=R$，卽得下面的結果：

$$U(M_0)=4\pi R\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}Y_n(\theta,\varphi), \tag{99}$$

其中 θ 和 φ 是球面上的點 M_0 的地理坐標。由此可知當 M 點通過球面時單球殼所生的勢函數是連續變動的。這性質對於更一般的曲面也能成立。

再看當 M 點通過球面時勢函數的法線方向導數（卽力的法線方向分力）的行爲。以 $\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial\nu}\right)_i$ 記法線方向導數的極限，當 M 點從球內部沿着半徑趨於球面上的點 M_0 時。又以 $\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial\nu}\right)_e$ 記這導數的極限，當 M 點從球外部沿着半徑趨於 M_0 時。以 ν 記球面在 M_0 的外法線方向，現在這方向與半徑 $\overline{OM_0}$ 的方向相同。關於 ν，卽關於 r 微分(97)和(98)式，然後置 $r=R$，卽得上記二極限的值爲：

$$\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial\nu}\right)_i=4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}Y_n(\theta,\varphi)。 \tag{100}$$

$$\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial\nu}\right)_e=-4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}Y_n(\theta,\varphi)。 \tag{101}$$

由此可知當變動點通過球面時，一般，勢函數的法線方向導數在此

有一個不連續點。

由(100)式和(101)式立刻可得下面兩個式子：

$$\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_e-\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_i=-4\pi\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\theta,\ \varphi),$$

$$\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_e+\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_i=-4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}Y_n(\theta,\ \varphi)。$$

再由(96)和(99)式可得：

$$\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_e-\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_i=-4\pi\rho(M_0)。\tag{102}$$

$$\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_e+\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}\right)_i=-\frac{U(M_0)}{R}。\tag{103}$$

(102)式說明勢函數的法線方向導數在 M_0 的躍度等於在這點的密度乘以(-4π)。

現在解釋(103)式右邊的數值。如前，這式中的 ν 表示半徑 $\overline{OM_0}$ 的方向。因積分(93)中祗有 d 和 M 點的坐標有關，所以

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \nu}=\iint_{S_R}\rho(M')\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{d}\right)ds。\tag{104}$$

但是
$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{d}\right)=-\frac{1}{d^2}\cos\omega,$$

其中 ω 是向量 $\overline{M'M}$ 和方向 ν 之間的交角。現在假設 M 點就是球面上的點 M_0，我們要決定積分(104)的數值。這時 $d=2R\cos\omega$，故

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{d}\right)=-\frac{1}{2Rd}。$$

因此積分(104)的值為

$$-\frac{1}{2R}\iint_{S_R}\rho(M')\frac{1}{d}ds=-\frac{1}{2R}U(M_0)。$$

以 $\frac{\partial U(M_0)}{\partial \nu}$ 記這數值，則(103)式可以寫成：

$$\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial\nu}\right)_e+\left(\frac{\partial U(M_0)}{\partial\nu}\right)_i=2\frac{\partial U(M_0)}{\partial\nu}。$$

將這式和(102)式聯立,可以解出單球殼的勢函數的法線方向導數的兩個極限值:

$$(105)\qquad \begin{cases}\left(\dfrac{\partial U(M_0)}{\partial\nu}\right)_i=\dfrac{\partial U(M_0)}{\partial\nu}+2\pi\rho(M_0),\\ \left(\dfrac{\partial U(M_0)}{\partial\nu}\right)_e=\dfrac{\partial U(M_0)}{\partial\nu}-2\pi\rho(M_0)。\end{cases}$$

對於更一般的曲面有時也成立這兩公式。

139. 中心電場中的電子 當考察電子在正原子核所產生的電場中的情況時,由舒留丁醬的理論我們可以得到下面的方程:

$$(106)\qquad -\frac{h^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)-eV(r)\psi=E\psi,$$

其中 h 是普朗克常數,μ 是電子的質量,e 是他所帶的電荷,$V(r)$ 是個已給的祇和 r 有關的函數,他決定電場中的電勢。這裏 r 表示和原點的距離,$\psi(x,y,z)$ 是波函數,E 是個常數,他決定我們所看的這個物理系統的能階。方程(106)應該有一個在無限空間中定義的且在無限遠點為有界的解。現在要求方程(106)的這樣的解,他是一個 r 的函數與另一個 θ 和 φ 的函數的乘積。在球坐標下拉普拉斯運算子 $\Delta\psi$ 可以表示為:

$$\Delta\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_1\psi,$$

和[135]中一樣,

$$\Delta_1\psi=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}。$$

方程(106)現在可以改寫為:

$$\frac{h^2}{2\mu}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_1\psi\right]+eV(r)\psi+E\psi=0。$$

以 $\psi=f(r)Y(\theta,\varphi)$ 代入,然後分離變數,可得:

$$\frac{\Delta_1 Y}{Y}=\frac{-\dfrac{h^2}{2\mu}\left[f''(r)+\dfrac{2}{r}f'(r)\right]-eV(r)f(r)-Ef(r)}{\dfrac{h^2}{2\mu r^2}f(r)}。$$

因此等式的兩邊都應等於同一個常數,記為 λ。於是我們就得到兩個方程

$$(107)\qquad \Delta_1 Y-\lambda Y=0$$

和

$$(108)\qquad -\frac{h^2}{2\mu}\left[f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)+\frac{\lambda}{r^2}f(r)\right]-eV(r)f(r)-Ef(r)=0。$$

方程 (107) 應有在整個球面上爲連續的解。我們在 [135] 中已知這時參數 λ 應取數值 $-l(l+1)$，而球函數 $Y_l(\theta, \varphi)$ 就是和這種 λ 對應的解。以上述 λ 的數值代入方程 (108) 可以得到決定函數 $f(r)$ 的方程，這函數現在改以 $f_l(r)$ 記之：

$$(109)\qquad \frac{h^2}{2\mu}f_l''(r)+\frac{h^2}{\mu r}f_l'(r)+\left[E+eV(r)-\frac{h^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right]f_l(r)=0。$$

參數 E 應如此決定，使得方程(109)有在 $r=0$ 及當 $r\to+\infty$ 都是有界的解。一般而論，滿足這種條件的 E 的數值有無限個之多。他們通常是從$(l+1)$開始的正整數，即

$$n=l+1,\ l+2,\ l+3,\cdots$$

這樣，E 的數值就和兩個數字有關，一個是整數 l，一個是次第數 n。l 稱爲角量子數，n 稱爲主量子數。當 l 和 n 已給時，一般，可以決定唯一的函數 $f_{nl}(r)$ 滿足方程(109)以及上述當 $r=0$ 和 $r=+\infty$ 時的邊值條件。至於函數 $Y_l(\theta, \varphi)$，他們一共有 $(2l+1)$ 個，記爲：

$$Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)\qquad (m=-l,\ -l+1,\cdots,l-1,l),$$

要知道波函數的全部特徵，我們還應該知道這第三個數字 m 的數值。m 通常稱爲磁量子數。當我們在這物理系統中加入方向沿 Z 軸的磁場而考察他所產生的擾亂現象時，m 的數值至爲緊要。

現在考察一個特別情形，即當電勢爲庫倫勢函數

$$V(r)=\frac{ke}{r}$$

的情形，其中 k 是個整數，在氫原子的場合 $k=1$。以這勢函數代入(109)式，即得下面的方程($k=1$)：

$$(110)\qquad \frac{h^2}{2\mu}f_l''(r)+\frac{h^2}{\mu r}f_l'(r)+\left[E+\frac{e^2}{r}-\frac{h^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right]f_l(r)=0。$$

導入另一變數 z 以代 r：

$$z=\frac{\mu e^2 r}{h^2}$$

又從

$$(111)\qquad \varepsilon=\frac{Eh^2}{\mu e^4}\ 和\ a=2l+1。$$

此外，再引進新的未知函數 y 以代 $f_l(r)$：

$$f_l(r)=\frac{1}{\sqrt{z}}y。$$

把所有這些都代入(110)式，即得方程

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(2\varepsilon+\frac{2}{z}-\frac{a^2}{4z^2}\right)y=0,$$

這就是[115]中討論過的方程。

現在祇看參數 E 取負値的情形。這時，如我們所知，E 有無限多個數值可以取，即設

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon}},$$

但參數 λ 應取如下的數值:

$$\lambda_p=\frac{s+1}{2}+p, \qquad (p=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

從而 $$\frac{1}{-2\varepsilon_p}=\left(\frac{s+1}{2}+p\right)^2 \text{ 及 } \varepsilon_p=-\frac{1}{2\left(\frac{s+1}{2}+p\right)^2}=-\frac{1}{2(p+l+1)^2},$$

由(111)式,參數 E 應取下列數值:

$$E_{nl}=-\frac{\mu e^4}{2h^2(p+l+1)^2}=-\frac{\mu e^4}{2h^2n^2}, \tag{112}$$

其中 $n=p+l+1$ 是主量子數。

由此可見在庫倫電場的情形參數 E 的數值和角量子數 l 無關。如果固定 n,自然 E 的數值也固定了,則由 $n=p+l+1$ 可得 l 的數值爲:

$$l=n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 0。$$

每一個這種 l 的數值對應於 $(2l+1)$ 個特徵函數 ψ。因此,對於參數 E 的值(112),對應的特徵函數的個數是:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2。$$

在一個電子的場合若取狄拉克方程以代舒留丁蓋方程,則可得到和球函數類似的函數。這種自旋球函數在B. A. 福克教授所著"量子力學引論"一書中有得敘述。

140. 球函數和旋轉羣的線性表示 我們從前曾經說到過,滿足拉普拉斯方程的變數 $(x,\ y,\ z)$ 的齊次多項式決定空間繞着原點的旋轉羣 R 的一個線性表示。

這樣,由[130]可知 l 階球函數的全體決定 R 的一個線性表示,這是一個 $(2l+1)$ 階的表示。現在更詳細地來研究這個問題。

設 l 階的球函數如(18)式所記,並特別記爲:

$$Q_l^{(m)}(\varphi,\theta)=e^{im\varphi}P_{l,m}(\cos\theta) \quad (m=-l,\ -l+1,\ \cdots,\ l-1,\ l), \tag{113}$$

其中 $$P_{l,-m}(\cos\theta)=P_{l,m}(\cos\theta)。$$

設 $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ 爲旋轉羣 R 中的一個元素,其尤拉角度爲 α,β 和 γ。經過這個旋轉以後球面上坐標爲 (φ,θ) 的點到達新的位置 (φ',θ'),而函數 $Q_l^{(m)}(\varphi',\theta')$ 則可表示爲諸函數 $Q_l^{(m)}(\varphi,\theta)$ 的線性結合。這個線性變換的方陣就是函數(113)所決定的 R 的線性表示中和 R 的元素 $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ 對應的方陣。這些函數與角度 φ 的簡單關係告訴我們:繞着 Z 軸旋轉一個角度 α,即 $\{\alpha,\ 0,\ 0\}$,所對應的是個對角線方陣

$$\begin{Vmatrix} e^{-il\alpha}, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & e^{-i(l-1)\alpha}, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & e^{-i(l-2)\alpha}, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & e^{il\alpha} \end{Vmatrix}。 \tag{114}$$

一般,和旋轉 R_0 對應的方陣的元素記爲 $\{D_l(R_0)\}_{ik}$,其中 i 和 k 各自獨立地跑遍 $-l$, $-l+1$, $\cdots$, l。

取 R_0 爲環繞 Y 軸旋轉一個角度 β,經過這個旋轉以後球面上坐標爲 $\varphi=0$ 和 θ 的點變爲坐標爲 $\varphi=0$ 和 $\theta+\beta$ 的點。由(113)式中諸函數的形式可知方陣 $D_l(R_0)$變函數$P_{l,m}(\cos\theta)$ 爲函數 $P_{l,m}[\cos(\theta+\beta)]$,即

$$P_{l,m}[\cos(\theta+\beta)]=\sum_{s=-l}^{+l}\{D_l(R_0)\}_{ms}P_{l,s}(\cos\theta)。\quad (m=-l,\ -l+1,\ \cdots,\ l)$$

回到(12)式,易知若 $s\neq0$ 則當 $\theta=0$ 時 $P_{l,s}(\cos\theta)$ 等於零。故在上式中置 $\theta=0$ 即得

$$P_{l,m}(\cos\beta)=\{D_l(R_0)\}_{m0}P_l(1)=\{D_l(R_0)\}_{m0}。$$

由此可知,一般,方陣 $D_l(R_0)$ 的第一行各元素都不等於零,就是說,祇有當 β 取特別數值時其中某些元素可以等於零。

因爲在諸方陣 $D_l(R)$ 中有在對角線上具有不同元素的對角線方陣 (114),也有某一行的元素都不等於零的方陣。如我們所知 [III$_1$, 69],這時 R 的方陣表示是不可約的。(113)中諸函數互相正交,但不歸範,即絕對値的平方的積分不等於 1。但以適當的常數因子乘之可以得到歸範函數:

(115) $$C_l^{(m)}Q_l^{(m)}(\varphi,\theta)。$$

這些函數決定一個和 $D_l(R)$ 相抵的不可約 U 表示 $D_l'(R)$[III$_1$, 63],在這個新的表示之下和 $\{\alpha,0,0\}$ 對應的仍爲方陣(114),因爲附加的常數因子並不改變函數(113)與 φ 的關係。

以任意絕對値等於 1 的因子乘函數 (115),仍舊得到 R 的 U 表示,而和 $\{\alpha,0,0\}$ 對應的仍爲方陣(114)。這種表示中的一種我們曾在[III$_1$, 62]中用另外的方法得到過。

前一段中研究過的舒留丁格方程的特徵函數藉其對應的特徵値 l 的不同而分爲許多小羣,凡和同一個 l 對應的$(2l+1)$個特徵函數(l 是角量子數)成爲一小羣,而磁量子數 m 則表示同一小羣中函數的次第,其値爲 $-l$, $-l+1$, $\cdots$, l。由函數(113)的形式立刻可得:

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}Q_l^{(m)}(\varphi,\theta)=mQ_l^{(m)}(\varphi,\theta),$$

就是說,小羣中第 m 個函數是運算子

(116) $$L_z=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

的特徵函數,而 m 是他所對應的特徵値。此外,我們知道,(113)中每一函數都滿足方程:

$$-\Delta_1Q_l^{(m)}(\varphi,\theta)=l(l+1)Q_l^{(m)}(\varphi,\theta),$$

就是說,上述小羣中$(2l+1)$個函數中的每一個都是運算子

(117) $$L^2=-\Delta_1=-\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

的特徵函數,而對應的特徵値等於 $l(l+1)$。運算子 L_z 和角動量在 Z 軸方向的支量差一個乘數 h。同樣,運算子(117)祇和角動量的平方差一個乘數 h^2。

141. 勒上特函數　假設勒上特方程

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}-2x\frac{du}{dx}+n(n+1)u=0 \tag{118}$$

中的 x 是複變數，n 是任意的數字。這方程在奇異點 $x=\pm1$ 的判定方程式的兩根都等於零[102]。因此在這兩點各有一正則解和一個含對數函數的解，後者在對應的奇異點的鄰域中非有界。

現在要以形式如(13)的積分來滿足方程(118)，這積分當 n 為正整數時卽勒上特多項式：

$$u(x)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C\frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}dt。 \tag{119}$$

代入方程(118)，得：

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}-2x\frac{du}{dx}+n(n+1)u=$$

$$=\frac{n+1}{2^{n+1}\pi i}\int_C\frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+3}}\Big[-(n+2)(t^2-1)+2(n+1)t(t-x)\Big]dt=$$

$$=\frac{n+1}{2^{n+1}\pi i}\int_C\frac{d}{dt}\left[\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-x)^{n+2}}\right]dt,$$

由此可見若當變數 t 沿着線路 C 走一週後

$$\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-x)^{n+2}} \tag{120}$$

仍舊回到原來的數值，那末(119)式就是方程(118)的解了。當 n 非整數時(119)式中的被積分函數有三個支點：$t=x$ 和 $t=\pm1$。逆時針方向環繞 $t=1$ 或 $t=-1$ 一週後，(120)中的分子 $(t^2-1)^{n+1}$ 獲得一個乘

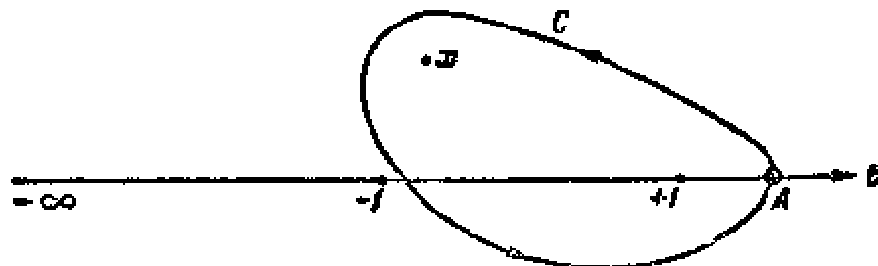


圖 73

數 $e^{(n+1)2\pi i}$，而環繞 $t=x$ 一週後分母 $(t-x)^{n+2}$ 獲得一個乘數 $e^{(n+2)2\pi i}$。今在複變數 t 平面中從 $t=-1$ 沿着實軸到 $t=-\infty$ 畫一條割線。又取 C 爲從實軸上 $t=1$ 的右邊某點 A 出發，逆時針方向環繞 $t=1$ 和 $t=x$ 一週以後重又回到 A 點的閉線路(圖 73)。

假設 x 點不在割線之上，且線路 C 不與割線相交。被積分的多值函數的始值是由條件 $\arg(t-1)=\arg(t+1)=0$ 和 $|\arg(t-x)|<\pi$ $(t>1)$ 而決定。由以上所述可知當 t 沿 C 走一週以後 (120) 中的函數確能回到原值。注意：由勾犀定理可知積分的數值與 A 點在實軸上 $t=1$ 的右邊的位置以及 C 的形狀無關，祇要 C 不和割線相交就好了。

這樣，我們就得到了方程(118)的解：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C\frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}dt, \tag{121}$$

其中 C 是前面說過的線路。這解是在如此被割過的平面中的 x 的正則函數，特別在 $x=1$ 亦然。但我們在[102]中知道方程(118)可以由高斯方程置 $\alpha=n+1$, $\beta=-n$, $\gamma=1$ 以及 $z=\frac{1-x}{2}$ 而得到。因爲解(121)在 $x=1$ 爲正則，卽在 $z=0$ 爲正則，所以除一常數因子外他應該符合於超越幾何級數，卽：

$$P_n(x)=CF\left(n+1,\ -n,\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right)。 \tag{122}$$

要決定常數 C 可以計算 $P_n(1)$：

$$P_n(1)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C\frac{(t^2-1)^n}{(t-1)^{n+1}}dt=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C\frac{(t+1)^n}{t-1}dt,$$

用留數定理可以算出 $P_n(1)=1$。故以 $x=1$ 代入(122)式卽得 $C=1$，從而

$$P_n(x)=F\left(n+1,\ -n,\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right), \tag{123}$$

當 n 爲正整數時這就是勒上特多項式。此外，因爲 $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)$ 中 α

和 β 可以交換，故由(123)式知道對於任意的 n：

$$P_n(x)=P_{-n-1}(x)。$$

利用(121)式立刻可以得到[132]中(37)，(39)和(40)等關係式。一般而論，方程(118)的解 $P_n(x)$ 以 $x=-1$ 和 $x=\infty$ 爲奇異點。在整個被割過的平面上這函數都可以用(121)式來表示。

142. 第二類勒上特函數　在前一段中我們已經找出方程(118)的一個解了。現在要來求他的第二個解。我們知道，如果 $y_1(x)$ 是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的解，那末第二個解可藉下面的公式做出來：

$$y_2(x)=Cy_1(x)\int e^{-\int p(x)dx}\frac{dx}{[y_1(x)]^2},\tag{124}$$

其中 C 是任意常數。首先，考察 n 是正整數的場合。方程(118)在其奇異點 $x=\infty$ 的判定方程的兩根爲 $\rho_1=n+1$ 和 $\rho_2=-n$。方程(118)的解和 ρ_1 對應的當 $x=\infty$ 時其值爲零。應用(124)式可以將這解表示爲：

$$Q_n(x)=P_n(x)\int_\infty^x\frac{dx}{(1-x^2)[P_n(x)]^2}。\tag{125}$$

函數 $Q_n(x)$ 以 $x=\pm1$ 爲奇異點，若在複變數 x 的平面上從 $x=-1$ 到 $x=1$ 畫一條割線，則 $Q_n(x)$ 在這被割過的平面中爲正則，且常可藉(125)式來表示。注意：$P_n(x)$ 的根都在區間$(-1,\ +1)$之內。

現在試以勒上特多項式和對數函數來表示 $Q_n(x)$。爲此，藉公式

$$u(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\lg\frac{x+1}{x-1}-v(x)\tag{126}$$

導入新的函數 $v(x)$ 以代 $u(x)$。則方程(118)改爲：

$$(1-x^2)\frac{d^2v}{dx^2}-2x\frac{dv}{dx}+n(n+1)v=2P_n'(x)。$$

由(42)式可將這方程改寫爲：

(127)

$$(1-x^2)\frac{d^2v}{dx^2}-2x\frac{dv}{dx}+n(n+1)v=2\sum_{k=1}^{N}(2n-4k+3)P_{n-2k+1}(x),$$

其中 $N=\frac{1}{2}n$ 當 n 爲偶數，$N=\frac{1}{2}(n+1)$ 當 n 爲奇數。回憶 $P_{n-2k+1}(x)$ 滿足方程：

$$(1-x^2)P''_{n-2k+1}(x)-2xP'_{n-2k+1}(x)+$$
$$+(n-2k+1)(n-2k+2)P_{n-2k+1}(x)=0,$$

可知方程

$$(1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2}-2x\frac{dw}{dx}+n(n+1)w=2(2n-4k+3)P_{n-2k+1}(x)$$

有特別解

$$w(x)=\frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}(x).$$

由(126)及(127)可知勒上特方程(118)有如下的解：

$$u_0(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\lg\frac{x+1}{x-1}-\sum_{k=1}^{N}\frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}(x). \tag{128}$$

他應該是 $P_n(x)$ 和 $Q_n(x)$ 的線性結合：

$$u_0(x)=C_1P_n(x)+C_2Q_n(x). \tag{129}$$

由(128)式及展開式

$$\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\cdots \qquad (|x|>1)$$

易知當 $x\to\infty$ 時 $\frac{u_0(x)}{x^{n-2}}$ 爲有界。但另一方面，(129)式右邊的 $P_n(x)$ 是 n 次多項式，又當 $n\to\infty$ 時 $Q_n(x)$ 與 $\frac{1}{x^{n+1}}$ 同階而趨於零，因此知道 $C_1=0$，卽得：

$$C_2Q_n(x)=u_0(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\lg\frac{x+1}{x-1}-R_n(x), \tag{130}$$

其中 $R_n(x)$ 是 $(n-1)$ 次多項式。以 $P_n(x)$ 除等式兩邊，然後關於 x 微分，得：

$$C_2\frac{d}{dx}\left[\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}\right]=\frac{1}{1-x^2}+\frac{S_n(x)}{[P_n(x)]^2},$$

其中 $S_n(x)$ 是 x 的多項式。另一方面，由(125)式可得：

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}\right]=\frac{1}{(1-x^2)[P_n(x)]^2}。$$

比較這兩個等式，可得：

$$\frac{C_2}{(1-x^2)[P_n(x)]^2}=\frac{1}{1-x^2}+\frac{S_n(x)}{[P_n(x)]^2},$$

從而
$$C_2=[P_n(x)]^2+(1-x^2)S_n(x),$$

置 $x=1$ 卽得 $C_2=1$。由(128)和(129)最後可得：

$$(131)\quad Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\lg\frac{1+x}{1-x}-\sum_{k=1}^{N}\frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}(x)。$$

$Q_n(x)$ 通常稱爲第二類勒让特函數。

(131) 式中對數函數的出現是方程 (118) 以 $x=\pm1$ 爲奇異點的特徵。容易將 $Q_n(x)$ 表示爲定積分的形式。因爲當 n 爲正整數時(120)式中的函數在 $t=\pm1$ 都等於零，故欲求形式如 (119) 的方程 (118) 的解，可取 C 爲線段 $-1\leqslant t\leqslant+1$，卽得一解：

$$(132)\qquad u_1(x)=C\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t^2)^n}{(x-t)^{n+1}}dt,$$

其中 C 是任意常數。這積分當 $x\to+\infty$ 時與 $\frac{1}{x^{n+1}}$ 同階而趨於零，因此 $u_1(x)$ 與 $Q_n(x)$ 祇差一個常數因子。現在要決定常數 C 使得 $u_1(x)=$ $=Q_n(x)$。由(11)式知道在 $P_n(x)$ 中 x^n 的係數是

$$(133)\qquad a_n=\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n!\,2^n}=\frac{2n!}{(n!)^2 2^n}。$$

回到(125)式，易見被積分函數依 x^{-1} 的正整數冪展開時其首項爲 $\left(-\frac{1}{a_n^2x^{2n+2}}\right)$，從而 $Q_n(x)$ 的展開式的首項是 $\frac{1}{(2n+1)a_nx^{n+1}}$。和(132)式比較，卽得 C 所應滿足的方程：

$$C\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^n dt=\frac{1}{a_n(2n+1)},$$

或
$$2C\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\varphi\, d\varphi=\frac{1}{a_n(2n+1)},$$

由[I, 100]得

$$2C\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n+1)(2n-1)\cdots5\cdot3}=\frac{1}{a_n(2n+1)},$$

再由(133)式卽得 $C=\frac{1}{2^{n+1}}$。代入(132)式，我們得到了 $Q_n(x)$ 的積分表示式：

$$Q_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t^2)^n}{(x-t)^{n+1}}dt。\tag{134}$$

這式子在整個複變數 x 平面上有效，除了線段 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 以外。現在再求 $Q_n(x)$ 的超越幾何級數表示式。利用[73]的(143)式，令其中的 $z=n+1$，還有 $\Gamma(2n+2)=(2n+1)\Gamma(2n+1)$，可將(133)式中的 a_n 表示爲：

$$a_n=\frac{\Gamma(2n+1)}{[\Gamma(n+1)]^2 2^n}=\frac{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{(2n+1)\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}。\tag{135}$$

其次，變換 $t=x^2$ 將勒让特方程(118)變爲：

$$t(t-1)\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{3t-1}{2}\frac{du}{dt}-\frac{n(n+1)}{4}u=0,$$

這是個高斯方程，其中參數 $\alpha=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$，$\beta=-\frac{n}{2}$，$\gamma=\frac{1}{2}$。應用[101]中$(64_2)$的第一式，置 $z=t=x^2$，卽得方程(118)的解：

$$u(x)=\frac{C}{x^{n+1}}F\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\frac{n}{2}+1,n+\frac{3}{2};\frac{1}{x^2}\right),\quad(|x|>1)\tag{136}$$

這解在無限遠點的行爲與 $Q_n(x)$ 一樣，故與 $Q_n(x)$ 祇差一個常數因子。剩下來要決定常數 C，使得(136)式的解符合於 $Q_n(x)$，後者依 $\frac{1}{x}$ 的冪展開時第一項爲 $\frac{1}{(2n+1)a_nx^{n+1}}$。由此易知 $C=\frac{1}{(2n+1)a_n}$，從而

$$Q_n(x)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{1}{x^{n+1}}F\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+\frac{3}{2},\frac{1}{x^2}\right)。\tag{137}$$

直到現在我們祇在 n 爲正整數時討論函數 $Q_n(x)$。當 n 取任意數

值時，也可以定義 $Q_n(x)$ 爲方程(118)的第二個解，好像前一段中對 $P_n(x)$ 做的一樣。回到積分(134)。當 $(n+1)$ 的實數部分爲正時這積分有意義，故可用來定義 $Q_n(x)$。在一般的場合則可取適當的積分線路而以路積分(119)來定義 $Q_n(x)$。(137)式對不等於負整數的 n 爲有效。應注意如果這時 n 不是正整數，則函數 $Q_n(x)$ 以 $x=\infty$ 爲支點。這時可以從 $x=1$ 到 $x=-\infty$ 畫一割線而使他在這被割的平面中爲單值。若 n 爲負整數，則置 $n=-m-1$，其中 m 爲正整數或零，這時方程(118)變爲

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}-2x\frac{du}{dx}+m(m+1)u=0,$$

因此可取 $P_m(x)$ 和 $Q_m(x)$ 爲方程(118)的解。對於函數 $Q_n(x)$ 易見[132]中(37)，(39)和(40)諸式均成立。

II　貝塞爾函數

143. 貝塞爾函數的定義　我們在研究圓膜振動的問題時已經遇到過貝塞爾函數[II, 178]。現在再回憶一下從前的結果，如何由波動方程得到貝塞爾函數。

平面中的波動方程是

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)。\tag{1}$$

研究圓膜振動時可取平面上的極坐標

$$x=r\cos\varphi;\quad y=r\sin\varphi,$$

我們要找方程(1)這樣的解，它可以表示爲三個函數的乘積，其中一個是 t 的函數，一個是 r 的函數，還有一個是 φ 的函數。如我們所知，這種解具有如下的形式：

$$(\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t)(C\cos p\varphi+D\sin p\varphi)Z_p(kr),\tag{2}$$

其中 α,β,C 和 D 是任意常數，而常數 ω,k 和 a 之間則存在關係：

$$\omega^2=k^2a^2。\tag{3}$$

(2)式中的 $Z_p(z)$ 是貝塞爾方程

$$(4)\qquad Z_p''(z)+\frac{1}{z}Z_p'(z)+\left(1-\frac{p^2}{z^2}\right)Z_p(z)=0$$

的任一解。

注意：(2)式中的常數 p 亦爲任意的，但我們取他爲整數，因爲希望得到一個關於變數 φ 的週期等於 2π 的解。此外，我們又希望這解當 $r=0$ 時爲有界，爲此，應取方程(4)的解使當 $z=0$ 時爲有界，卽取貝塞爾函數 $J_p(z)$，$(p\geqslant 0)$。常數 k 和 ω 的數值由邊值條件決定。以後我們還要談到貝塞爾函數的應用，但現在則先來研究方程(4)所決定的函數的性質，首先從貝塞爾函數開始。

除了一個常數因子不能確定外，貝塞爾函數的展開式爲[II, 48]：

$$(5)\qquad J_p(z)=Cz^p\left[1-\frac{z^2}{2(2p+2)}+\frac{z^4}{2\cdot 4\cdot(2p+2)(2p+4)}-\cdots\right]。$$

若 $p=n$ 是正整數或零，則取常數 C 等於 $\frac{1}{2^n n!}$，如常，設 $0!=1$。這樣，足號爲正整數的貝塞爾函數就可寫成：

$$(6)\qquad J_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}。$$

若 p 不是整數，則在(5)式中取常數 C 等於

$$\frac{1}{2^p\Gamma(p+1)},$$

從而貝塞爾函數的展開式是：

$$J_p(z)=\frac{z^p}{2^p\Gamma(p+1)}\left[1-\frac{1}{1!\,(p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2!\,(p+1)(p+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^4-\cdots\right],$$

或由 $\Gamma(z)$ 的基本性質有：

$$(7)\qquad J_p(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}。$$

當 $p=n$ 爲正整數時(7)式顯然與(6)式全同，現在要看當 $p=-n$

爲負整數時（7）式變成怎樣。如我們所知，當 z 等於負整數或零時 $\Gamma(z)$ 的值爲無窮大。故在展開式（7）中凡使 $p+k+1$ 等於負整數或零的 k 所對應的項都等於零，就是滿足

$$-n+k+1\leqslant 0 \text{ 或 } k\leqslant n-1$$

的所有的項都等於零。換言之，級數應從 $k=n$ 的項開始：

$$J_{-n}(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k}。$$

記 $l=k-n$，並將 $(-1)^n$ 拿到求和符號之外，得：

$$J_{-n}(z)=(-1)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(l+n)!\,\Gamma(l+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2l}.$$

即

$$J_{-n}(z)=(-1)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(l+n)!\,l!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2l},$$

即

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z) \qquad (n\text{ 爲整數})。 \tag{8}$$

換句話說，足號爲負整數 $(-n)$ 的貝塞爾函數與足號爲正整數 n 的貝塞爾函數祇差一個常數因子 $(-1)^n$。

當 p 非整數時函數 $J_p(z)$ 和 $J_{-p}(z)$ 顯然是貝塞爾方程的兩個線性獨立的解[II, 48]。我們知道級數（7）對於所有 z 的有限值皆爲收斂。

144. 諸貝塞爾函數間之關係　現在導出足號不同的貝塞爾函數之間的幾個基本關係。微分冪級數（7）可得：

$$\frac{d}{dz}\,\frac{J_p(z)}{z^p}=\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(p+k+1)}\,\frac{z^{2k}}{2^{p+2k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2k}{k!\,\Gamma(p+k+1)}\,\frac{z^{2k-1}}{2^{p+2k}},$$

改寫 k 爲 $k+1$，則上式右邊的級數變做從 $k=0$ 加起：

$$\frac{d}{dz}\,\frac{J_p(z)}{z^p}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2(k+1)}{(k+1)!\,\Gamma(k+p+2)}\cdot\frac{z^{2k+1}}{2^{p+2k+2}}$$

或

$$\frac{d}{dz}\,\frac{J_p(z)}{z^p}=-\frac{1}{z^p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(p+1+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+1+2k}。$$

和（7）式比較，即得

(9)
$$\frac{d}{dz}\frac{J_p(z)}{z^p}=-\frac{J_{p+1}(z)}{z^p}。$$

算出左邊分數式的導數，可將這式子改寫爲：

(10)
$$J'_p(z)=-J_{p+1}(z)+\frac{pJ_p(z)}{z}\qquad [J'_0(z)=-J_1(z)]。$$

以 z 除(9)式的兩邊，得：

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\frac{J_p(z)}{z^p}=-\frac{J_{p+1}(z)}{z^{p+1}}。$$

上記的關係可以用一句話來表示：微分分式 $\frac{J_p(z)}{z^p}$ 再以 z 來除就等於把這分式中的 p 都改爲 $p+1$ 然後再變他的符號。

應用這規則若干次以後，可得如下的公式，對於任何正整數 m 皆成立：

(11)
$$\frac{d^m}{(zdz)^m}\frac{J_p(z)}{z^p}=(-1)^m\frac{J_{p+m}(z)}{z^{p+m}}。$$

這式子又可以改写成：

(12)
$$\frac{d^m}{(dz^2)^m}\frac{J_p(z)}{z^p}=(-1)^m\frac{J_{p+m}(z)}{2^m z^{p+m}}。$$

再求乘積 $z^pJ_p(z)$ 关於 z 的導數：

$$\frac{d}{dz}z^pJ_p(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2(p+k)z^{2p+2k-1}}{k!\Gamma(p+k+1)2^{p+2k}},$$

或由 $\Gamma(p+k+1)=(p+k)\Gamma(p+k)$ 卽得

$$\frac{d}{dz}z^pJ_p(z)=z^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p-1+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p-1+2k},$$

應用(7)式可得和(9)式類似的結果：

(13)
$$\frac{d}{dz}z^pJ_p(z)=z^pJ_{p-1}(z)。$$

算出等式左邊乘積的導數，可將這式子改寫如下：

(14)
$$J'_p(z)=J_{p-1}(z)-\frac{pJ_p(z)}{z}。$$

以 z 除(13)式的兩邊，得：

$$\frac{d}{z\,dz}\,z^p J_p(z) = z^{p-1} J_{p-1}(z)。$$

應用這公式若干次以後，可得和(11)式類似的式子：

(15)
$$\frac{d^m}{(z\,dz)^m}\,z^p J_p(z) = z^{p-m} J_{p-m}(z)$$

或

(16)
$$\frac{d^m}{(dz^2)^m}\,z^p J_p(z) = \frac{z^{p-m} J_{p-m}(z)}{2^m}。$$

在(11)和(15)式中我們用了下面的記號：

$$\frac{d^m}{(z\,dz)^m}\,f(z) = \frac{d}{z\,dz}\cdot\frac{d}{z\,dz}\cdots\frac{d}{z\,dz}\,f(z),$$

其中關於 z 微分以後再用 z 來除的運算一共有 m 次。

比較(10)式和(14)式，卽得三個鄰接貝塞爾函數之間的關係式：

$$\frac{pJ_p(z)}{z} - J_{p+1}(z) = J_{p-1}(z) - \frac{pJ_p(z)}{z}$$

或

(17)
$$\frac{2pJ_p(z)}{z} = J_{p-1}(z) + J_{p+1}(z)。$$

應用上列諸公式，現在我們證明凡是足號等於整數的一半的貝塞爾函數都可以用初等函數來表示。這裏所謂整數的一半就是形式爲 $\pm\frac{2m+1}{2}$ 的數，其中 m 是整數。首先，在(7)式中置 $p=\frac{1}{2}$，得：

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}。$$

應用函數 $\Gamma(z)$ 的基本性質若干次以後，可得：

$$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k+1)(2k-1)\cdots 3\cdot 1}{2^{k+1}}\sqrt{\pi},$$

由是得

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,2^k\cdot1\cdot3\cdots(2k+1)\sqrt{\pi}}\frac{z^{\frac{1}{2}+2k}}{2^{-\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

卽

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z。\tag{18}$$

現在應用(11)式，卽得對於任何正整數 m 皆成立的：

$$J_{\frac{2m+1}{2}}(z)=(-1)^m\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{\frac{2m+1}{2}}\frac{d^m}{(zdz)^m}\left(\frac{\sin z}{z}\right)。\tag{19}$$

對足號爲負值的可得類似的結果。於(7)式中置 $p=-\frac{1}{2}$，得：

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z,\tag{20}$$

然後應用(15)式，卽得對於任何正整數 m 皆成立的

$$J_{-\frac{2m+1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{\frac{2m+1}{2}}\frac{d^m}{(zdz)^m}\left(\frac{\cos z}{z}\right)。\tag{21}$$

我們在[II, 48]中曾經寫過足號爲 $\pm\frac{3}{2}$ 和 $\pm\frac{5}{2}$ 的貝塞爾函數的表示式當然也包含在(19)和(21)的結果之中。

145. 貝塞爾函數的正交性和他們的零點 我們已經說過從前研究函膜振動的時候曾用到貝塞爾函數。那時我們用普通的福里哀方法，爲了要滿足問題中的初始條件，將已給的函數按照貝塞爾函數展開。這樣就得到一個和福里哀級數類似的級數，其中諸貝塞爾函數有正交性[II, 178]。現在我們要從更一般的觀點來研究這個問題，並說明幾件補充的事實。

如我們所知，貝塞爾函數 $J_p(kz)$ 滿足方程[II, 48]

$$\frac{d^2J_p(kz)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dJ_p(kz)}{dz}+\left(k^2-\frac{p^2}{z^2}\right)J_p(kz)=0。$$

或以 z 乘之，可將這方程改寫爲：

$$\frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_p(kz)}{dz}\right]+\left(k^2z-\frac{p^2}{z}\right)J_p(kz)=0。$$

我們以後假設足號 p 爲實數，且 $p\geqslant 0$。

取兩個不同的 k 的數值，並寫出對應的微分方程：

$$\frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_p(k_1z)}{dz}\right]+\left(k_1^2z-\frac{p^2}{z}\right)J_p(k_1z)=0$$

$$\frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_p(k_2z)}{dz}\right]+\left(k_2^2z-\frac{p^2}{z}\right)J_p(k_2z)=0\text{。}$$

以 $J_p(k_2z)$ 乘第一式，$J_p(k_1z)$ 乘第二式，相減，然後在有限區間 $(0, l)$ 上積分：

$$\int_0^l\left\{J_p(k_2z)\frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_p(k_1z)}{dz}\right]-J_p(k_1z)\frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_p(k_2z)}{dz}\right]\right\}dz+$$

$$+(k_1^2-k_2^2)\int_0^l zJ_p(k_1z)J_p(k_2z)dz=0\text{。}$$

第一積分符號內的函數是另一函數關於 z 的導數：

$$\frac{d}{dz}\left[z\frac{dJ_p(k_1z)}{dz}J_p(k_2z)-z\frac{dJ_p(k_2z)}{dz}J_p(k_1z)\right],$$

因此有

$$\left[z\frac{dJ_p(k_1z)}{dz}J_p(k_2z)-z\frac{dJ_p(k_2z)}{dz}J_p(k_1z)\right]_{z=0}^{z=l}+$$

$$+(k_1^2-k_2^2)\int_0^l zJ_p(k_1z)J_p(k_2z)dz=0\text{。}$$

但是顯見
$$\frac{dJ_p(kz)}{dz}=kJ'_p(kz),$$

其中
$$J'_p(x)=\frac{d}{dx}J_p(x),$$

因此前式又可寫成：

(22)
$$\left[k_1zJ'_p(k_1z)J_p(k_2z)-k_2zJ'_p(k_2z)J_p(k_1z)\right]_{z=0}^{z=l}+$$

$$+(k_1^2-k_2^2)\int_0^l zJ_p(k_1z)J_p(k_2z)dz=0\text{。}$$

寫出貝塞爾函數的展開式

(23) $$J_p(z)=z^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)}\frac{z^{2k}}{2^{p+2k}}。$$

由於 $p\geqslant 0$，可知當 $z=0$ 時積分出來的項等於零，因此最後得到下面的基本公式：

(24) $$l[k_1J_p'(k_1l)J_p(k_2l)-k_2J_p'(k_2l)J_p(k_1l)]+\\ +(k_1^2-k_2^2)\int_0^l zJ_p(k_1z)J_p(k_2z)dz=0。$$

當 $l=1$ 時得：

(25) $$k_1J_p'(k_1)J_p(k_2)-k_2J_p'(k_2)J_p(k_1)+\\ +(k_1^2-k_2^2)\int_0^1 zJ_p(k_1z)J_p(k_2z)dz=0。$$

在以上的演算中我們預設 $p\geqslant 0$。易見在更一般的情形當 $p>-1$ 時(22)式中的積分仍有意義，並且積分出來的項當 $z=0$ 時仍等於零。

現在先證明貝塞爾函數不能有複數的零點。先設他有一複零點 $a+ib$，其中 $a\neq 0$。展開式（7）中的係數都是實數，因此當 $J_p(z)$ 有一零點 $a+ib$ 時必有一共軛零點 $a-ib$。於(25)式中置 $k_1=a+ib$，$k_2=$ $=a-ib$。這時 $k_1^2\neq k_2^2$，故得

$$\int_0^1 zJ_p(k_1z)J_p(k_2z)dz=0。$$

$J_p(k_1z)$ 和 $J_p(k_2z)$ 的數值應該是共軛複數，因此上式中被積分函數取正值，故這式子不能成立。剩下來再看 $a=0$ 的情形，即要證明函數 $J_p(z)$ 不能以純虛數 $\pm ib$ 爲零點。實際上，以 $z=ib$ 代入(23)式，所得的級數爲：

$$J_p(ib)=(ib)^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(p+k+1)}\frac{b^{2k}}{2^{p+2k}},$$

當然其值不能爲零，因爲由[71]的(111)式知道當 $z>0$ 時函數 $\Gamma(z)$ 取正值，所以這級數的每一項都是正的。這樣，我們就得到下面的結果：若 p 爲實數，且 $p>-1$，則函數 $J_p(z)$ 的零點都是實數。此外，注意展開式(23)中祇含偶數冪的項，立刻可知 $J_p(z)$ 的零點必然成對出現，每一對中的兩零點絕對值相等，符號相反。因此我們祇要研究正零點好

了。以後我們就是這樣做。寫出貝塞爾函數的漸近展開式[113]：

$$J_p(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right)$$

或
$$J_p(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(z^{-1})\right]。$$

當 z 沿正實軸趨於無限時方括弧中第二項的極限爲零，而第一項則在 -1 和 $+1$ 之間振動無限次。由此知道函數 $J_p(z)$ 有無限多個實零點。

若 $z=k_1$ 和 $z=k_2$ 爲方程

$$J_p(zl)=0 \tag{26}$$

的兩個不同的正根，則由(24)式立刻知道貝塞爾函數的正交性：

$$\int_0^l zJ_p(k_1z)J_p(k_2z)=0\,。\tag{27}$$

由羅爾定理，函數 $J'_p(z)$ 也應該有無限多個實的正零點，若以 k_1 和 k_2 記方程

$$J'_p(zl)=0 \tag{28}$$

的兩個不同的正根，則由(24)式同樣可以得到(27)式。

現在再看比以上更一般的方程：

$$\alpha J_p(zl)+\beta zJ'_p(zl)=0, \tag{29}$$

其中 α 和 β 是已知的實數。設 $z=k_1$ 和 $z=k_2$ 是這方程的兩個不同的根，即

$$\alpha J_p(k_1l)+\beta k_1J'_p(k_1l)=0;\quad \alpha J_p(k_2l)+\beta k_2J'_p(k_2l)=0\,。$$

由此可得

$$k_1J'_p(k_1l)J_p(k_2l)-k_2J'_p(k_2l)J_p(k_1l)=0,$$

所以這時(24)式中積分出來的項也等於零，如前可得(27)式。(26)和(28)顯然是(29)的特別情形。如前，利用正交性易證方程(29)不能有複數根 $a+ib$，其中 $a\neq0$。

此外，如前可證方程(29)也不能有純虛根，祇要 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$。

回憶兩個已知的關係

$$(30)\quad \frac{d}{dz}\frac{J_p(z)}{z^p}=-\frac{J_{p+1}(z)}{z^p};\quad \frac{d}{dz}[z^{p+1}J_{p+1}(z)]=z^{p+1}J_p(z)。$$

應用羅爾定理，由第一式可知在 $J_p(z)$ 的兩個鄰接的零點之間至少有 $J_{p+1}(z)$ 的一個零點，由第二式可知在 $J_{p+1}(z)$ 的兩個鄰接的零點之間至少有 $J_p(z)$ 的一個零點。合這二結果可知 $J_p(z)$ 和 $J_{p+1}(z)$ 的正零點兩兩相間，卽在 $J_p(z)$ 的兩個鄰接正零點之間有而且祇有一個 $J_{p+1}(z)$ 的零點，反之亦然。

假設 a 和 b 依次爲 $J_p(z)$ 和 $J_{p+1}(z)$ 的最小正零點。因 $z^{p+1}J_{p+1}(z)$ 以 $z=0$ 爲零點，對(30)的第二式應用羅爾定理，可知 $J_p(z)$ 應有一零點在區間 $(0,\ b)$ 之內，卽 $a<b$。

這樣，我們得知函數 $J_p(z)$ 的最小正零點較 $J_{p+1}(z)$ 的最小正零點更和原點接近些。此外，注意函數 $z^{-p}J_p(z)$ 是方程

$$z\frac{d^2y}{dz^2}+(2p+1)\frac{dy}{dz}+zy=0$$

的根，可知 $z^{-p}J_p(z)$ 和 $\frac{d}{dz}[z^{-p}J_p(z)]$ 不能有相同的正根[104]。由(30)式知道函數 $J_p(z)$ 和 $J_{p+1}(z)$ 亦不能有相同的正根。

在求已給函數關於貝塞爾函數的展開式時，最緊要的就是要用到貝塞爾函數的正交性。例如在研究圓膜振動的問題時我們就要做這一步工作。

這時還要計算形式如

$$\int_0^l zJ_p^2(kz)dz$$

的積分，其中 $z=k$ 是方程(29)的根。現在看一個特別情形，卽當 k 是方程(26)的單根時。於(24)式中置 $k_2=k$，k_1 爲一趨於 k 爲極限的變數，則得

$$(k_1+k)\int_0^l zJ_p(k_1z)J_p(kz)dz=\frac{lkJ'_p(kl)J_p(k_1l)}{k_1-k}。$$

當 $k_1 \to k$ 時等式右邊的分子和分母的極限都是零，因爲 $J_p(k_1 l)$ 以 $J_p(kl)=0$ 爲極限之故。照通常的規則求這未定形的值，卽得

$$2k\int_0^l zJ_p^2(kz)dz = l^2 kJ_p'^2(kl)$$

或

$$\int_0^l zJ_p^2(kz)dz = \frac{l^2}{2}J_p'^2(kl)。\tag{31}$$

於已知的關係

$$\frac{d}{dz}\frac{J_p(z)}{z^p} = -\frac{J_{p+1}(z)}{z^p}$$

中置 $z=kl$，卽得

$$J_p'(kl) = -J_{p+1}(kl),$$

從而(31)式可以寫成：

$$\int_0^l zJ_p^2(kz)dz = \frac{l^2}{2}J_{p+1}^2(kl)。\tag{32}$$

當 $z=k$ 是方程(28)的根時我們同樣可得

$$\int_0^l zJ_p^2(kz)dz = -\frac{l^2}{2}J_p''(kl)J_p(kl)。\tag{33}$$

但已知

$$J_p''(kl) + \frac{1}{kl}J_p'(kl) + \left(1-\frac{p^2}{k^2l^2}\right)J_p(kl) = 0,$$

利用 $J_p'(kl)=0$ 的關係可將(33)式改寫爲：

$$\int_0^l zJ_p^2(kz)dz = \frac{1}{2}\left(l^2-\frac{p^2}{k^2}\right)J_p^2(kl)。\tag{34}$$

146．母函數和積分表示　考察複變數 t 的解析函數

$$e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}。\tag{35}$$

他以 $t=0$ 和 $t=\infty$ 爲本性奇異點，故可在整個複變數 t 平面上展開爲羅朗級數，其中的係數爲參數 z 的函數：

$$e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z)t^n。\tag{36}$$

現在證明這些係數就是貝塞爾函數 $J_n(z)$。實際上,(36)式中諸係數可藉如下的路積分來表示[15]:

$$a_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_0} u^{-n-1}e^{\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)}du,$$

其中 l_0 是任一從正方向环繞原點一週的單閉線路。由公式 $u=\frac{2t}{z}$ 導入新的積分變數 t 以代替 u, 其中 z 是個固定的不等於零的數值。$u=0$ 和 $t=0$ 對應,而線路 l_0 仍變爲 t 平面上從正方向環繞原點一週的閉線路。經過這變換以後得到

$$a_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^n\int_{l_0} t^{-n-1}e^{t-\frac{z^2}{4t}}dt。$$

在線路 l_0 上我們可以把指數函數展開做關於 t 爲一致收歛的冪級數:

$$e^{-\frac{z^2}{4t}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{z^{2k}}{2^{2k}t^k}。$$

代入前式,得:

$$a_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}\int_{l_0} t^{-n-1-k}e^t\,dt。$$

若 $n+k$ 爲負整數,則上式中的被積分函數不以 $t=0$ 爲奇異點,因此積分之值爲零。若 $(n+k)$ 爲正整數或零,則由 e^t 的展開式易知被積分函數在 $t=0$ 的留數等於 $\frac{1}{(n+k)!}$。因此當足號 n 爲正整數時有

$$a_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k},$$

就是說,$a_n(z)$ 確和 $J_n(z)$ 相等。若於(36)式中改 t 爲 $\left(-\frac{1}{t}\right)$, 等式左邊保持不變,故知 $a_{-n}(z)=(-1)^n a_n(z)$。由(8)式可知當 n 爲負整數時

$$a_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z)=J_{-n}(z)。$$

這樣,(36)式就可以改寫爲:

$$e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(z)t^n。\tag{37}$$

換句話說，函數(35)是足號爲整數的貝塞爾函數的母函數。用(37)式極易得出足號爲整數的貝塞爾函數的一些性質來。特別，我們可以利用他導出足號爲整數的貝塞爾函數的積分表示。

於該式中置 $t=e^{i\varphi}$，得

$$e^{iz\sin\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(z)e^{in\varphi},$$

設 z 和 φ 爲實數，將上式中實數部分和虛數部分分開，得：

$$\cos(z\sin\varphi)=J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n(z)\cos n\varphi+\sum_{n=-1}^{-\infty}J_n(z)\cos n\varphi$$

$$\sin(z\sin\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}J_n(z)\sin n\varphi+\sum_{n=-1}^{-\infty}J_n(z)\sin n\varphi$$

由(8)式可將這兩式改寫爲：

$$(38)\quad\begin{cases}\cos(z\sin\varphi)=J_0(z)+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}J_{2n}(z)\cos 2n\varphi\\[2ex]\sin(z\sin\varphi)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}J_{2n-1}(z)\sin(2n-1)\varphi。\end{cases}$$

(38)式表示兩函數的福里哀級數展開式，利用通常決定係數的公式可得如下的貝塞爾函數的積分表示：

$$(39)\quad\begin{cases}J_{2n}(z)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(z\sin\varphi)\cos 2n\varphi\,d\varphi & (n=0,\ 1,\ \cdots)\\[2ex]J_{2n-1}(z)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(z\sin\varphi)\sin(2n-1)\varphi\,d\varphi。 & (n=1,\ 2,\ \cdots)\end{cases}$$

用同樣的方法由(38)式還可以得到兩個等式：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\varphi)\cos(2n-1)\varphi\,d\varphi=0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(z\sin\varphi)\sin 2n\varphi\,d\varphi=0。$$

(39)中的兩個式子可以合成一個式子，不論當足號爲奇數或偶數時都成立的。爲此，考察積分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(z\sin\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi。$$

當 n 爲偶數時右邊第一項是 $J_n(z)$，而第二項等於零，故其和等於 $J_n(z)$。當 n 爲奇數時第一項等於零，而第二項等於 $J_n(z)$，其和仍爲 $J_n(z)$。因此不論足號 n 爲奇爲偶，函數 $J_n(z)$ 常有如下的積分表示：

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi。\quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{40}$$

嚴格地說，我們祇當 z 爲實數時證明了上面的等式。但由解析延拓的原理可知他對任何複數 z 都成立。因爲被積分的是個偶函數，故這公式又可寫成：

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(n\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi。\tag{41}$$

這式子又可改寫爲：

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n\varphi - z\sin\varphi)}\,d\varphi。\tag{42}$$

實際上，對指數函數應用尤拉公式，得到兩項，第一項就是(41)式中的積分，而第二項等於零，因爲被積分的是奇函數之故。

注意：當 n 不是整數時(40)式不成立。這時成立更複雜的公式：

$$J_p(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi - \frac{\sin p\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-p\varphi - z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi, \tag{43}$$

這式子對於虛軸右邊的 z 爲有效。其中雙曲線正弦函數：

$$\mathrm{sh}\,\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}。$$

這公式的證明在[151]中。

應用(37)式以及等式

$$e^{\frac{1}{2}a\left(t-\frac{1}{t}\right)} \cdot e^{\frac{1}{2}b\left(t-\frac{1}{t}\right)} = e^{\frac{1}{2}(a+b)\left(t-\frac{1}{t}\right)},$$

得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a+b)t^n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(a)t^k \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(b)t^k。$$

算出右邊兩冪級數的乘積然後集項，比較等式兩邊 t^n 的係數，得

$$J_n(a+b)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}J_k(a)\,J_{n-k}(b)。\tag{44}$$

這公式是足號爲整數的貝塞爾函數的加法定理。

對於足號等於零的函數存在更一般的加法定理：

$$J_0(\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha})=J_0(a)J_0(b)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_k(a)J_k(b)\cos k\alpha。\tag{45}$$

147．福里哀貝塞爾公式 任一在區間 $(0,\infty)$ 中定義的函數若在這區間中滿足某些附加條件，則必有類似於福里哀積分的積分表示式，但其中所含的是貝塞爾函數而不是三角函數。具體說來，假設 $f(\rho)$ 在區間 $(0,\infty)$ 中連續，且在任何有限部分區間中滿足狄義赫利條件 [II, 143]，此外，積分

$$\int_0^\infty \rho|f(\rho)|d\rho$$

也存在，則對任意的整數 n 和 $\rho>0$ 成立下面的公式：

$$f(\rho)=\int_0^\infty sJ_n(s\rho)ds\int_0^\infty tf(t)J_n(st)dt。\tag{46}$$

現在我們只說一個證明(46)式的大概步驟，不擬作詳細的證明了。設 ρ 爲向徑，φ 爲輻角導入極坐標，並對函數

$$g(x,y)=f(\rho)e^{in\varphi},\qquad \begin{pmatrix}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{pmatrix}\tag{47}$$

應用福里哀公式 [II, 160]，變更裏面兩積分的次序，得：

$$g(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(ux+vy)}du\,dv\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\xi,\eta)e^{-i(u\xi+v\eta)}d\xi\,d\eta。$$

代替變數 (u,v) 和 (ξ,η) 再導入極坐標

$$\xi=s\cos\alpha;\qquad u=t\cos\beta;$$

$$\eta=s\sin\alpha;\qquad v=t\sin\beta。$$

利用(47)式可寫：

$$f(\rho)e^{in\varphi}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty tdt\int_{-\pi}^{+\pi}e^{i\rho t\cos(\beta-\varphi)}d\beta\int_0^\infty sf(s)ds\int_{-\pi}^{+\pi}e^{in\alpha}e^{-ist\cos(\alpha-\beta)}d\alpha,$$

由下式導入新的積分變數 β' 以代 β：

$$\beta-\varphi=\frac{\pi}{2}+\beta',$$

得
$$f(\rho)e^{in\varphi}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty t\,dt\int_{-\frac{3\pi}{2}-\varphi}^{\frac{\pi}{2}-\varphi}e^{-i\rho t\sin\beta'}d\beta'\int_0^\infty sf(s)ds\int_{-\pi}^{+\pi}e^{in\alpha}e^{-ist\cos\left(\alpha-\varphi-\beta'-\frac{\pi}{2}\right)}d\alpha。$$

注意三角函數的週期性，可將第二重積分的區間改爲：$(-\pi,+\pi)$。同樣，引進新的變數 $\alpha'=\alpha-\varphi-\beta'$ 以代 α，得：

$$f(\rho)e^{in\varphi}=\frac{e^{in\varphi}}{4\pi^2}\int_0^\infty t\,dt\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-i\rho t\sin\beta'+in\beta'}d\beta'\int_0^\infty sf(s)ds\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-ist\sin\alpha'+in\alpha'}d\alpha',$$

由此式及(42)式即得(46)式。

對於有限區間 $(0, l)$ 中的已給函數，代替 (46) 式我們可以將他按照前一段中講過的正交函數系展開爲一個和福里哀級數類似的級數。

注意：當足號 n 是任意大於$\left(-\frac{1}{2}\right)$的實數時公式(46)仍成立，又若關於函數 $f(\rho)$ 的假設減少一些時(46)式亦能成立。

148. 漢開爾函數和諾伊曼函數 在[112]中我們曾藉下面兩式子決定貝塞爾方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(1-\frac{p^2}{z^2}\right)w=0 \tag{48}$$

的兩個解：

$$\left\{\begin{aligned} H_p^{(1)}(z)&=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}i}\left(\frac{z}{2}\right)^p\int_{\lambda_1}(\tau^2-1)^{p-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}\,d\tau \\ H_p^{(2)}(z)&=-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}i}\left(\frac{z}{2}\right)^p\int_{\lambda_2}(\tau^2-1)^{p-\frac{1}{2}}e^{iz\tau}\,d\tau\,。\end{aligned}\right. \tag{49}$$

這些式子中的被積分函數係在具有兩條從 $\tau=\pm1$ 平行於虛軸到達 $+i\infty$ 的割線的複變數 τ 平面中單值地定義起來。即在第一式中我們假設 $\arg(\tau^2-1)=0$ 當 $\tau>1$，而在第二式中則設 $\arg(\tau^2-1)=2\pi$ 當 $\tau>1$。若從實軸上的線段 $(1, +\infty)$ 經下半平面越過兩割線到達線段 $(-\infty, -1)$上，這樣我們就完成了從負方向環繞 $\tau=\pm1$ 兩點的一半路程，因此 $(\tau^2-1)=(\tau-1)(\tau+1)$ 的幅角就得到了改變量 (-2π)，換句話說，在 (49) 的第二式中當 $\tau<-1$ 時應有 $\arg(\tau^2-1)=0$。對於所有在虛軸右邊的 z，即實數部分大於零的 z，(49) 式定義了漢開爾函數。此外，注意 (49) 式中的被積分函數當 z 的數值固定時是參數 p 的整函數，又因被積分函數在無限遠點之迅速趨於零，我們可以肯定當 z 固定時漢開爾函數 $H_p^{(k)}(z)$ 是參數 p 的整函數。由 [112] 中漢開爾函數的漸近展開式立刻可知這兩函數是貝塞爾方程的兩個線性獨立的解。並且我們還知道貝塞爾函數是兩漢開爾函數之和之半：

$$J_p(z)=\frac{H_p^{(1)}(z)+H_p^{(2)}(z)}{2}。 \tag{50}$$

貝塞爾方程(48)和通常定義三角函數 $\cos pz$ 與 $\sin pz$ 的微分方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+p^2w=0 \tag{51}$$

之間有非常類似之處。和漢開爾函數對應的是方程(51)的兩解 e^{ipz} 和 e^{-ipz}，和貝塞爾函數對應的是 $\cos pz$。現在再導入方程(48)的一個解，他等於兩漢開爾函數之差被除於 $2i$：

$$N_p(z)=\frac{H_p^{(1)}(z)-H_p^{(2)}(z)}{2i}。 \tag{52}$$

這解通常稱爲諾伊曼函數，他和方程(51)的解 $\sin pz$ 對應。由(50)式和(52)式可以用貝塞爾函數和諾伊曼函數來表示漢開爾函數：

$$H_p^{(1)}(z)=J_p(z)+iN_p(z);\quad H_p^{(2)}(z)=J_p(z)-iN_p(z)。 \tag{53}$$

由此式立刻可知 $J_p(z)$ 和 $N_p(z)$ 是方程(48)的兩個線性獨立的解。

對漢開爾函數我們曾經有過如下的漸近表示：

$$\begin{cases} H_p^{(1)}(z)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\,e^{i\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}[1+O(z^{-1})], \\ H_p^{(2)}(z)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\,e^{-i\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}[1+O(z^{-1})], \end{cases} \tag{54}$$

這兩式子是當 $z>0$ 時證明了的。如[113]中所證，利用(50)式可得貝塞爾函數的漸近表示：

$$J_p=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(z^{-1})\right], \tag{55}$$

同樣，當 $z>0$ 時，利用(52)式可得諾伊曼函數的漸近表示：

$$N_p(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\sin\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(z^{-1})\right]。 \tag{56}$$

在上記各式中均應設 $z>0$ 及根號取正值。

現在要導出一個以貝塞爾函數表示諾伊曼函數的公式。首先，考察足號 p 不是整數的場合。這時，如我們所知，$J_p(z)$ 和 $J_{-p}(z)$ 是方程

(48) 的兩個線性獨立的解。但 $J_{-p}(z)$ 應該可以表示爲 $J_p(z)$ 和 $N_p(z)$ 的線性結合，因爲我們已經證明過後二者也是線性獨立的解，就是說應當有如下的公式：

$$J_{-p}(z)=C_1J_p(z)+C_2N_p(z), \tag{57}$$

其中 C_1 和 C_2 是待定的常數係數。利用漸近表示式(55)和(56)可寫：

$$\cos\left(z+\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=C_1\cos\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+$$

$$+C_2\sin\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C_1O(z^{-1})+C_2O(z^{-1})。$$

最後兩項相加仍舊是 $O(z^{-1})$，故得：

$$\cos\left(z+\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=C_1\cos\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+ \tag{58}$$

$$+C_2\sin\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(z^{-1})。$$

由此比較等式兩邊的主要項就可決定常數 C_1 和 C_2 的數値。實際上，置

$$C_1=\cos p\pi-A_1;\quad C_2=-\sin p\pi-A_2。$$

其中 A_1 和 A_2 是新的未知常數。代入(58)式得：

$$\cos\left(z+\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(z+\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-A_1\cos\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$-A_2\sin\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(z^{-1})$$

或
$$A_1\cos\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+A_2\sin\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=O(z^{-1}),$$

就是說，等式左邊是週期爲 2π 的週期函數，當 $z\to+\infty$ 時其極限爲零。由此立刻可知應有 $A_1=A_2=0$，卽

$$C_1=\cos p\pi;\quad C_2=-\sin p\pi。$$

代入 (57) 式解出 $N_p(z)$，卽得用貝塞爾函數表示諾伊曼函數的公式：

(59)
$$N_p(z)=\frac{J_p(z)\cos p\pi-J_{-p}(z)}{\sin p\pi}。$$

和漢開爾函數一樣，諾伊曼函數也是參數 p 的整函數。當 p 不等於整數時(59)式有效。當 p 等於整數時(59)式中的分母等於零。但由(8)式顯知這時分子也等於零。這樣，當 p 爲整數時要求(59)式的值，我們必須計算一個未定形，將(59)式右邊的分子和分母各自關於 p 微分，然後再令 p 等於整數 n：

$$N_n(z)=\left.\frac{\frac{\partial J_p(z)}{\partial p}\cos p\pi-\pi J_p(z)\sin p\pi-\frac{\partial J_{-p}(z)}{\partial p}}{\pi\cos p\pi}\right|_{p=n}。$$

這樣，我們就可將足號爲整數的諾伊曼函數表示如下：

(60)
$$N_n(z)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_p(z)}{\partial p}-(-1)^p\frac{\partial J_{-p}(z)}{\partial p}\right]_{p=n}。$$

以(59)式代入(53)式，卽得以貝塞爾函數表示漢開爾函數的公式(當 p 非整數時)：

(61)
$$\begin{cases} H_p^{(1)}(z)=i\dfrac{J_p(z)e^{-ip\pi}-J_{-p}(z)}{\sin p\pi} \\ H_p^{(2)}(z)=-i\dfrac{J_p(z)e^{ip\pi}-J_{-p}(z)}{\sin p\pi}。\end{cases}$$

由此立刻可得足號祇差一個符號的漢開爾函數之間的關係：

(62)
$$H_{-p}^{(1)}(z)=e^{ip\pi}H_p^{(1)}(z)；\quad H_{-p}^{(2)}(z)=e^{-ip\pi}H_p^{(2)}(z)。$$

嚴格說來，這公式是在 p 不等於整數的假設下證明的。但因(62)式中等號左右兩邊都是 p 的整函數，故知其對任何 p 皆成立。當 p 爲整數時(61)式的分子和分母都等於零。如前求這未定形的值卽得對應於整數 $p=n$ 的公式。

最後，考察足號 $p=\frac{2m+1}{2}$ 的場合，其中 m 爲正整數或零。若以這種 p 代入決定漢開爾函數的(49)式，則所得積分符號之內的函數是個全平面的正則函數，包含 $\tau=\pm1$ 在內，因此這積分的數值等於零。

但這時因子$\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)$則等於無窮大,故(49)式失了意義。這時,我們可以改用[112]中的(195)和(196)式。一般而論,這兩展開式是發散的,但如我們所證,他們在形式上是滿足貝塞爾方程的。不過在目前的情形,他們不僅收斂,而且退化爲有限項之和,所以就給我們一個漢開爾函數的有限表示式。試以足號爲$p=\frac{2m+1}{2}$的第一個漢開爾函數爲例:

$$H^{(1)}_{\frac{2m+1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{i\left(z-\frac{(m+1)\pi}{2}\right)}}{\Gamma(m+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}\Gamma(m+1+k)\left(\frac{i}{2z}\right)^k$$

或

$$H^{(1)}_{\frac{2m+1}{2}}(z)=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{i\left(z-\frac{(m+1)\pi}{2}\right)}}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}(m+k)!\left(\frac{i}{2z}\right)^k。$$

由此立刻知道所有對應於$k\geqslant m+1$的項都等於零,故得:

$$(63)\quad H^{(1)}_{\frac{2m+1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{i\left(z-\frac{(m+1)\pi}{2}\right)}}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(m+k)!\left(\frac{i}{2z}\right)^k。$$

同樣,對第二個漢開爾函數也有有限表示式:

$$(64)\quad H^{(2)}_{\frac{2m+1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{-i\left(z-\frac{(m+1)\pi}{2}\right)}}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(m+k)!\left(\frac{-i}{2z}\right)^k。$$

公式(59),(61)和(62)當$p=\frac{2m+1}{2}$時皆成立。注意:(61)式亦可用來定義漢開爾函數,當$p=\frac{2m+1}{2}$時;由這式和(19),(21)兩式可得:

$$H^{(1)}_{\frac{2m+1}{2}}(z)=$$
$$=\frac{i\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}z^{\frac{2m+1}{2}}\frac{d^m}{(z\,dz)^m}\left[(-1)^m e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\sin z}{z}-\frac{\cos z}{z}\right]$$

或　$$H^{(1)}_{\frac{2m+1}{2}}(z)=(-1)^m i\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{\frac{2m+1}{2}}\frac{d^m}{(zdz)^m}\left(\frac{-i\sin z-\cos z}{z}\right),$$

因此最後可以寫成：

$$H^{(1)}_{\frac{2m+1}{2}}(z)=(-1)^{m+1} i\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{\frac{2m+1}{2}}\frac{d^m}{(zdz)^m}\left(\frac{e^{iz}}{z}\right), \tag{65}$$

完全類似的可得：

$$H^{(2)}_{\frac{2m+1}{2}}(z)=(-1)^m i\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{\frac{2m+1}{2}}\frac{d^m}{(zdz)^m}\left(\frac{e^{-iz}}{z}\right)。 \tag{66}$$

(63)和(64)兩式亦可由此兩式導出。於(61)式中置 $p=\frac{1}{2}$，並利用

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z;\quad J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$$

的結果，可得：

$$H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(z)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{iz};\quad H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(z)=i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-iz}。$$

對於漢開爾函數易證一列和我們從前對貝塞爾函數證明過的類似的關係。茲舉出下列幾個：

$$\frac{d^m}{(zdz)^m}\left(\frac{H^{(1)}_p(z)}{z^p}\right)=(-1)^m\frac{H^{(1)}_{p+m}(z)}{z^{p+m}};$$

$$\frac{d^m}{(zdz)^m}\left(\frac{H^{(2)}_p(z)}{z^p}\right)=(-1)^m\frac{H^{(2)}_{p+m}(z)}{z^{p+m}};$$

$$\frac{2p}{z}H^{(1)}_p(z)=H^{(1)}_{p-1}(z)+H^{(1)}_{p+1}(z);$$

$$\frac{2p}{z}H^{(2)}_p(z)=H^{(2)}_{p-1}(z)+H^{(2)}_{p+1}(z)。$$

注意：由 $J_p(z)$ 的定義可知當 p 和 z 爲實數時 $J_p(z)$ 和 $N_p(z)$ 是實數，而 $H^{(1)}_p(z)$ 和 $H^{(2)}_p(z)$ 是共軛複數。

149. 足號爲整數的諾伊曼函數的展開式　當 n 爲整數時 $J_n(z)$ 和 $J_{-n}(z)$ 爲線性相關，這時可以取 $N_n(z)$ 爲第二個線性獨立的解。因此我們就想得到在全平面上有效的 $N_n(z)$ 的展開式。由富克斯的一般理論知道這展開式中除了 z 的整數冪以外還要包含 $\lg z$。

首先說明關於函數 $\Gamma(z)$ 的幾個公式。對於他，我們曾經有過如下的維爾史特拉斯無窮乘積：

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{Cz}z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}, \qquad (C=0.57\cdots)$$

其中 C 是尤拉常數。如 [68] 中所知，我們可以寫出這乘積的對數導數像對有限乘積一樣。由是

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{1}{z}+C+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+k}-\frac{1}{k}\right);$$

設 $z=n$，其中 n 是一個正整數，得

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}=-\frac{1}{n}-C-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+k}-\frac{1}{k}\right)=$$

$$=-\frac{1}{n}-C+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots$$

或

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}=\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+1-C。 \qquad (n=2,3,\cdots)$$

其次，因 $\Gamma(n)=(n-1)!$，故

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}=-\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma^2(t)}=-\frac{1}{(t-1)!}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t-2}+\cdots+1-C\right), \qquad (t=2,3,\cdots) \tag{67}$$

當 $t=1$ 時 $\Gamma(1)=1,\ \Gamma'(1)=-C$，因此

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}=C。 \qquad (t=1) \tag{68}$$

現在研究當 t 等於負整數或零的場合。我們知道 $\Gamma(z)$ 以 $z=-n$ 爲一階極點，他在這極點的留數爲 $\frac{(-1)^n}{n!}$，就是說，在 $z=-n$ 的鄰近有如下的展開式：

$$\Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}+a_0+a_1(z+n)+\cdots$$

或

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=(-1)^n n!\frac{z+n}{1+\beta_1(z+n)+\beta_2(z+n)^2+\cdots}。$$

由此立刻可得

$$\left.\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right|_{t=-n}=(-1)^n n! \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{69}$$

現在回頭來求(60)式所定義的解 $N_n(z)$ 的展開式。將

$$J_{\pm p}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\pm p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\frac{1}{\Gamma(\pm p+k+1)}$$

關於參數 p 微分，得：

$$\frac{\partial J_p(z)}{\partial p}=\lg\frac{z}{2}J_p(z)+\left(\frac{z}{2}\right)^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=p+k+1},$$

$$\frac{\partial J_{-p}(z)}{\partial p}=-\lg\frac{z}{2}J_{-p}(z)-\left(\frac{z}{2}\right)^{-p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=-p+k+1}.$$

然後再置 $p=n$，得

$$\left.\frac{\partial J_p(z)}{\partial p}\right|_{p=n}=\lg\frac{z}{2}J_n(z)+\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=n+k+1}$$

和

$$\left.\frac{\partial J_{-p}(z)}{\partial p}\right|_{p=n}=-\lg\frac{z}{2}J_{-n}(z)-\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=-n+k+1}.$$

代入(60)式並應用(67)式和(69)式，即得：

(70)
$$\pi N_n(z)=2J_n(z)\left(\lg\frac{z}{2}+C\right)-\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}-$$
$$-\left(\frac{z}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+1\right)-\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{n+k}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n+k-1}+\cdots+1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\cdots+1\right),\qquad(\text{當 } n\geqslant 1).$$

又當 $n=0$ 時有

(71)
$$\pi N_0(z)=2J_0(z)\left(\lg\frac{z}{2}+C\right)-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\cdots+1\right).$$

150. 變數爲純虛數的場合　若 $Z_p(z)$ 是貝塞爾方程的一解，那末我們知道[II, 49] $Z_p(kz)$ 是方程

(72)
$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(k^2-\frac{p^2}{z^2}\right)w=0$$

的解。置 $k=i$，則知函數 $Z_p(iz)$ 是方程

(73)
$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}-\left(1+\frac{p^2}{z^2}\right)w=0$$

的解。

首先取 $Z_p(z)$ 等於 $J_p(z)$：

$$J_p(iz)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k i^p i^{2k}}{k!\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}=i^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}.$$

要得到方程(73)的解，他當 p 爲實數且 $z>0$ 時取實數值的，可用常數 $i^{-p}=e^{-\frac{1}{2}p\pi i}$ 乘上面所寫的解。這樣我們就得到方程(73)的下面一個解：

(74)
$$I_p(z)=e^{-\frac{1}{2}p\pi i}J_p(iz)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}.$$

函數 $I_{-p}(z)$ 也是方程(73)的解，且當 p 非整數時 $I_p(z)$ 和 $I_{-p}(z)$ 是方程(73)的兩個線性獨立的解。

現在若取 $Z_p(z)$ 等於第一個漢開爾函數，則再以一常數因子乘之，可得如下的方程(73)的解：

(75) $$K_p(z)=\frac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2}p\pi i}H_p^{(1)}(iz)。$$

回憶(62)式，可將上式改寫為：

(76) $$K_p(z)=\frac{1}{2}\pi i e^{-\frac{1}{2}p\pi i}H_{-p}^{(1)}(iz)。$$

利用(61)的第一式，可以用 $I_{\pm p}(z)$ 來表示 $K_p(z)$。實際上，由該式可得：

$$K_p(z)=-\frac{1}{2}\pi e^{\frac{1}{2}p\pi i}\frac{J_p(iz)e^{-ip\pi}-J_{-p}(iz)}{\sin p\pi},$$

再由(74)得：

$$K_p(z)=-\frac{1}{2}\pi e^{\frac{1}{2}p\pi i}\frac{I_p(z)e^{-\frac{1}{2}p\pi i}-I_{-p}(z)e^{-\frac{1}{2}p\pi i}}{\sin p\pi}$$

或

(77) $$K_p(z)=\frac{1}{2}\pi\frac{I_{-p}(z)-I_p(z)}{\sin p\pi}。$$

函數 $I_p(z)$ 和 $K_p(z)$ 所滿足的關係和 [148] 中的 (59) 式類似，該式是以貝塞爾函數來表示諾伊曼函數的。

應用(74)式的定義和足號為整數的貝塞爾函數的性質 $J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z)$ 不難證明

(78) $$I_{-n}(z)=I_n(z)。$$

於(77)式中將 $p\to n$，決定未定形的數值，卽得足號為整數的函數 $K_n(z)$ 的表示式：

(79) $$K_n(z)=\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{\partial I_{-p}(z)}{\partial p}-\frac{\partial I_p(z)}{\partial p}\right]_{p=n}。$$

如[112]中所知，漸近公式：

$$H_p^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}[1+O(|z|^{-1})]$$

當 $-\pi+\varepsilon<\arg z<\pi-\varepsilon$ 時成立，故可以 iz 代 z，假設 z 爲正實數且 $\arg(iz)=\frac{\pi}{2}$。應用(75)式可得當 $z>0$ 時的 $K_p(z)$ 的漸近表示：

$$K_p(z)=\frac{1}{2}\pi ie^{\frac{1}{2}p\pi i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-\frac{\pi}{4}i}e^{i\left(iz-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}[1+O(z^{-1})]\ ,$$

或

$$K_p(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}[1+O(z^{-1})]\qquad(z>0),\tag{80}$$

就是說，當 $z\to+\infty$ 時函數 $K_p(z)$ 依指數律減少。

方程(73)常在理論物理學中遇到，其時方程的解 $K_p(z)$ 依指數律減小在物理問題上有很大的應用。

有時人們也以 $K_p(z)$ 代表我們現在的函數 $\cos p\pi\, K_p(z)$。

若在方程(72)中改 k 爲 ik，則知函數 $I_p(kz)$ 和 $K_p(kz)$ 是方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}-\left(k^2+\frac{p^2}{z^2}\right)w=0\tag{81}$$

的解。他們是線性獨立的，正像貝塞爾方程的解 $J_p(z)$ 和 $H_p^{(1)}(z)$ 一樣。

關於貝塞爾函數有許多的表。例如在 P. O. 庫西明教授的書"貝塞爾函數"中就有這種表。

151. 積分表示　爲說明貝塞爾函數的許多性質方便起見，可以利用幾個我們從前沒有尋出來過的積分表示。這些表示式可以由平面波的疊合❶，積分變換的方法❷或是由已有的貝塞爾函數的顯式直接變化而得到。下面要說的是第三種辦法。在(7)式中以 $\frac{1}{\Gamma(p+k+1)}$ 的路積分表示[74]代入，即

$$\frac{1}{\Gamma(p+k+1)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{l}e^{\tau}\tau^{-(p+k+1)}d\tau,$$

其中 l 是包含負實軸在其內部的線路。我們得到：

---

❶ 富朗克和米謝斯：理論物理方程。

❷ 柯朗-希爾勃脫：理論物理學的方法。

$$J_p(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_{l'}e^{\tau}\,\tau^{-(p+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{l'}e^{\tau}\,\tau^{-(p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\tau^{-k}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}d\tau,$$

因最後一級數爲一致收斂，故積分與級數求和可以交換。求出級數的和，得：

$$J_p(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l'}\left(\frac{z}{2}\right)^{p}\tau^{-(p+1)}\,e^{-\frac{z^2}{4\tau}+\tau}d\tau。$$

我們假設複數 z 滿足條件

$$|\arg z|<\frac{\pi}{2}, \tag{82}$$

並作變換 $\tau=\frac{1}{2}zt$，則得：

$$J_p(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l}t^{-p-1}\,e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}dt, \tag{83}$$

其中積分路線 l 仍可取以前的環狀線路 l'。公式(83)係 H. Я. 蘇寧所得到的(1870 年)。

現在取線路 l 爲：負實軸上割線的下岸，圓 $|t|=1$ 和上述割線的上岸。藉 $t=e^{w}$ 導入新的變數 w。則積分線路 l 變爲線路 C_0，如圖 74 所示。而函數 $J_p(z)$ 這時可以表示爲

$$J_p(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}e^{z\,\mathrm{sh}\,w-pw}\,dw。 \tag{84}$$

圖 74

注意：線路 C_0 上所有與原點相距爲有限的部分可以任意變形。要得到更多的結果還須把這積分再化一步。如果假設 C_0 如圖 74 所示，則置 $w=\varphi-\pi i$，就可容易地完成這一步驟。由 $\mathrm{sh}(\varphi+2\pi i)=\mathrm{sh}\,\varphi$ 不難得到下面的公式(比較[146])：

$$J_p(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(p\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi-\frac{\sin p\pi}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-p\varphi-z\,\mathrm{sh}\,\varphi}d\varphi。 \tag{85}$$

現在再求形式如(85)的其餘諸圓柱函數的積分表示。

利用(85)式和下面的關係[148]：

$$N_p(z)=\frac{J_p(z)\cos p\pi-J_{-p}(z)}{\sin p\pi},$$

可得

$$\pi N_p(z)=\mathrm{ctg}\,p\pi\int_0^{\pi}\cos(p\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi-\frac{1}{\sin p\pi}\int_0^{\pi}\cos(p\varphi+z\sin\varphi)\,d\varphi-$$

$$-\int_0^{\infty}e^{p\varphi-z\,\mathrm{sh}\,\varphi}d\varphi-\cos p\pi\int_0^{\infty}e^{-p\varphi-z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi$$

或

$$N_p(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(z\sin\varphi-p\varphi)\,d\varphi-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(e^{p\varphi}+e^{-p\varphi}\cos p\pi)e^{-z\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi。 \tag{86}$$

由上式與(85)式可以求得漢開爾函數:

$$H_p^{(1)}(z)=J_p(z)+iN_p(z); \quad H_p^{(2)}(z)=J_p(z)-iN_p(z)$$

的積分表示。我們有:

$$H_p^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{C_1} e^{z\,\mathrm{sh}\,w-pw}\,dw,$$

(87)

$$H_p^{(2)}(z)=-\frac{1}{\pi i}\int_{C_2} e^{z\,\mathrm{sh}\,w-pw}\,dw,$$

其中 C_1 和 C_2 依次爲連接$(-\infty)$和$(\infty,+\pi i)$及$(-\infty)$和$(\infty,-\pi i)$的無限線路。由解析延拓的原理可知(85)式和(87)式對任意的 z 皆成立。

152. **漸近展開式** 當 $|z|$ 或 $|p|$ 甚大時利用前一段所得的積分表示(84)和(87)容易求得圓柱函數的漸近表示。

記

(88)
$$\frac{p}{z}=\xi,$$

引進函數

(89)
$$f(w)=\mathrm{sh}\,w-\xi w。$$

則(84)和(87)的積分可以寫成:

(90)
$$\int_{C_p} e^{zf(w)}dw。$$

現在假設 p 和 z 都是正實數,然後應用最速下降法[78]。

要運用這個方法首先必須確定鞍點 w_0 的位置,他是由條件

$$f'(w_0)=\mathrm{ch}\,w_0-\xi=0$$

所決定的,確定線路

$$I_m(\mathrm{sh}\,w-\xi w)=I_m(\mathrm{sh}\,w_0-\xi w_0);$$

並且要知道線路 C_1, C_2 和 C_0 是可以變形爲函數(89)的最速變動線的。

我們按照 $\xi=\frac{p}{z}$ 的數值的不同分做三種情形來研究這問題。

1. $\xi>1$, $p\gg1$ 的情形。

這時鞍點是 $w_0=\pm\alpha$,這裏 $\alpha>0$ 是 $\mathrm{ch}\,\alpha=\xi$ 的解。經過鞍點的固定線路的方程是:

(91)
$$v=0 \text{ 和 } \sin v\,\mathrm{ch}\,u=v\,\mathrm{ch}\,\alpha。 \qquad (w=u+iv)$$

這些關於坐標軸爲對稱的固定線路如 75 圖所示,其上的箭頭方向表示 $f(w)$ 的實數部分 $R[f(w)]$ 減少的方向。考察

$$R[f(w)]=\mathrm{sh}\,u\cos v-\xi u,$$

易知若依次取積分路線 C_1, C_2 和 C_0 爲固定線路$(-\infty,-\alpha,\alpha,B)$, $(-\infty,-\alpha,\alpha,A)$和$(A,\alpha,B)$,則當 z 甚大時諸圓柱函數的數值由鞍點鄰近小段線路上的積分決定。現在以函數 $H_p^{(1)}(z)$ 爲例,說明這種估計的詳細情形。改變積分路徑,以線路 C 代替固定線路$(-\infty,-\alpha,\alpha,B)$,如 76 圖所示。則有

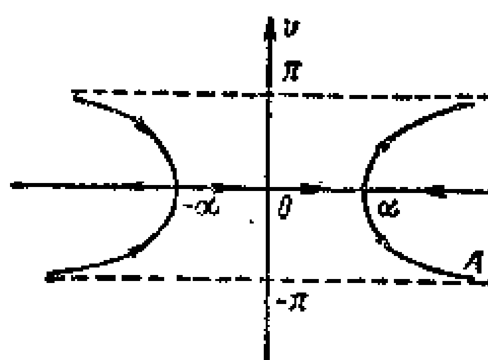


圖 75

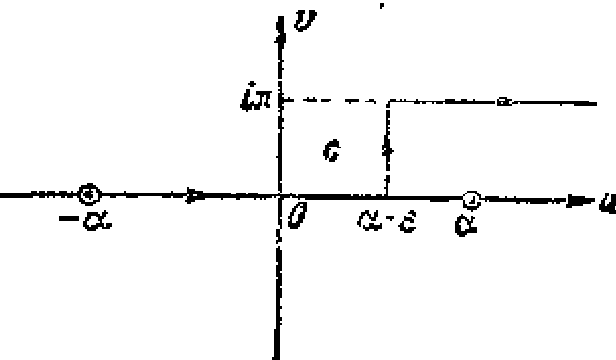


圖 76

(92)
$$H_{\nu}^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{C}e^{zf(w)}\,dw。$$

取

(93)
$$\varepsilon=\left(\frac{12}{z\operatorname{ch}\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}$$

並設 z 如此之大，使得

(94)
$$\frac{z\operatorname{sh}\alpha}{2}\varepsilon^{2}=N\geqslant 8。$$

注意：在[80]的例 2 中我們也用到這個條件。

從(93)和(94)式可得

(95)
$$z\operatorname{ch}\alpha=\frac{N}{\sqrt[3]{18}}(z\operatorname{ch}\alpha)^{\frac{2}{3}}\geqslant 3(z\operatorname{ch}\alpha)^{\frac{2}{3}}$$

和

(96)
$$\varepsilon\leqslant 0.75\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha},$$

這兩式子在以後的估計中很有用處。

將積分(92)寫成下列五個積分之和：

(97)
$$\int_{-\infty}^{-\alpha-\varepsilon}e^{zf(w)}\,dw+\int_{-\alpha-\varepsilon}^{-\alpha+\varepsilon}e^{zf(w)}\,dw+\int_{-\alpha+\varepsilon}^{\alpha-\varepsilon}e^{zf(w)}\,dw+$$
$$+\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha-\varepsilon+\pi i}e^{zf(w)}\,dw+\int_{\alpha-\varepsilon+\pi i}^{\infty+\pi i}e^{zf(w)}\,dw。$$

其中第二個積分我們已經在[80]中討論過。現在來估計其餘四個積分。為此，考察

(98)
$$\Phi(w)=R[f(w)]=\operatorname{sh}u\cos v-u\operatorname{ch}\alpha。$$

在區間 $-\infty<u\leqslant-\alpha-\varepsilon$ 中，我們有：

$$\Phi(w)=\Phi(-\alpha-\varepsilon)+[\Phi(w)-\Phi(-\alpha-\varepsilon)]=\Phi(-\alpha-\varepsilon)-$$
$$-[\operatorname{ch}(\alpha+\varepsilon)-\operatorname{ch}\alpha]\cdot|u+\alpha+\varepsilon|-\frac{\operatorname{sh}(\alpha+\varepsilon)}{2!}|u+\alpha+\varepsilon|^{2}-\cdots<$$
$$<\Phi(-\alpha-\varepsilon)-[\operatorname{ch}(\alpha+\varepsilon)-\operatorname{ch}\alpha]\cdot|u+\alpha+\varepsilon|。\qquad(\text{這時 } v=0)$$

但
$$\Phi(-\alpha-\varepsilon)=f(-\alpha-\varepsilon)=f(-\alpha)-\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2!}\varepsilon^{2}-\frac{\operatorname{ch}\alpha}{3!}\varepsilon^{3}-\cdots<$$
$$<f(-\alpha)-\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}\varepsilon^{2}=f(-\alpha)-\frac{N}{z}$$

又 $$\operatorname{ch}(\alpha+\varepsilon)-\operatorname{ch}\alpha=\frac{\operatorname{sh}\alpha}{1}\varepsilon+\frac{\operatorname{ch}\alpha}{2}\varepsilon^2+\cdots>\frac{\operatorname{sh}\alpha}{1}\varepsilon+\frac{\operatorname{ch}\alpha}{2}\varepsilon^2=$$

$$=\frac{\varepsilon^2\operatorname{sh}\alpha}{2}\frac{2}{\varepsilon}+\frac{\operatorname{ch}\alpha}{2}\varepsilon^2>\frac{3N}{z}\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}。$$

因此最後得

$$\Phi(w)<f(-\alpha)-\frac{N}{z}-\frac{3N}{z}\left|u+\alpha+\varepsilon\right|\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}。$$

利用這不等式可得

$$\left|\int_{-\infty}^{-\alpha-\varepsilon}e^{zf(w)}\,dw\right|<e^{zf(-\alpha)}\frac{e^{-N}\operatorname{sh}\alpha}{3N\operatorname{ch}\alpha}。\tag{99}$$

在區間 $-\alpha+\varepsilon\leqslant u\leqslant\alpha-\varepsilon,\ v=0$ 中我們有:

$$\Phi(u)=f(u)=\operatorname{sh}u-u\operatorname{ch}\alpha$$

$$f'(u)=-(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}u)\leqslant-[\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}(\alpha-\varepsilon)]$$

$$f(u)<f(-\alpha+\varepsilon)-[\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}(\alpha-\varepsilon)](u+\alpha-\varepsilon)。$$

但由(95)知

$$f(-\alpha+\varepsilon)=f(-\alpha)-\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2!}\varepsilon^2+\frac{\operatorname{ch}\alpha}{3!}\varepsilon^3-\frac{\operatorname{sh}\alpha}{4!}\varepsilon^4+\cdots<f(-\alpha)-\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2!}\varepsilon^2+\frac{\operatorname{ch}\alpha}{3!}\varepsilon^3=$$

$$=f(-\alpha)-\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}\varepsilon^2\left(1-\frac{\varepsilon\operatorname{ch}\alpha}{3\operatorname{ch}\alpha}\right)<f(-\alpha)-0.75\frac{N}{z}。$$

又 $$\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}(\alpha-\varepsilon)=\frac{\operatorname{sh}\alpha}{1!}\varepsilon-\frac{\operatorname{ch}\alpha}{2!}\varepsilon^2+\frac{\operatorname{sh}\alpha}{3!}\varepsilon^3-\cdots>$$

$$>\varepsilon\operatorname{sh}\alpha\left(1-\frac{\varepsilon\operatorname{ch}\alpha}{2\operatorname{sh}\alpha}\right)>\frac{5}{8}\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}\varepsilon^2\frac{2}{\varepsilon}>\frac{5N\operatorname{ch}\alpha}{3z\operatorname{sh}\alpha}。$$

這裏我們用了(94)和(96)兩式。

最後得:
$$f(u)<f(-\alpha)-0.75\frac{N}{z}-\frac{N}{z}(u+\alpha-\varepsilon)\frac{5\operatorname{ch}\alpha}{3\operatorname{sh}\alpha}。$$

利用這不等式可證:

$$\left|\int_{-\alpha+\varepsilon}^{\alpha-\varepsilon}e^{zf(w)}\,dw\right|<\frac{3\operatorname{sh}\alpha}{5N\operatorname{ch}\alpha}e^{zf(-\alpha)-0.75N}。\tag{100}$$

要估計(97)中最後兩個積分,注意

$$f(-\alpha)=-f(\alpha)=(\alpha-\operatorname{th}\alpha)\operatorname{ch}\alpha。$$

利用展開式 $$\alpha=\operatorname{arc\,th}\eta=\eta+\frac{\eta^3}{3}+\frac{\eta^5}{5}+\cdots$$

可得 $$f(-\alpha)>\operatorname{ch}\alpha\frac{\operatorname{th}^3\alpha}{3}=\frac{\operatorname{sh}^3\alpha}{3\operatorname{ch}^2\alpha}。$$

利用(95)式,得 $$f(-\alpha)>\frac{N^3}{54z}。$$

由不等式 $\alpha>\varepsilon$ 顯然可得

$$f(\alpha-\varepsilon)<0<f(-\alpha)-\frac{N^3}{54z}。$$

要估計(97)式的第四個積分，注意在區間 $u=\alpha-\varepsilon,\ 0\leqslant v\leqslant\pi$ 中

$$\Phi(w)=f(\alpha-\varepsilon)-(1-\cos v)\operatorname{sh}(\alpha-\varepsilon)。$$

但
$$1-\cos v\geqslant\frac{2v^2}{\pi^2},$$

又由(96)

$$\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{sh}(\alpha-\varepsilon)}=\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha-\varepsilon\operatorname{ch}\alpha+\varepsilon^2\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}-\cdots}<\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha-\varepsilon\operatorname{ch}\alpha}<\frac{100}{25}=4,$$

即 $\operatorname{sh}(\alpha-\varepsilon)>\frac{1}{4}\operatorname{sh}\alpha$ 。因此

$$\Phi(w)<f(\alpha-\varepsilon)-\frac{2v^2}{5\pi^2}\operatorname{sh}\alpha<f(-\alpha)-\frac{N^3}{54z}-\frac{2v^2}{5\pi^2}\operatorname{sh}\alpha。$$

利用這不等式易證：

$$\left|\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha-\varepsilon+\pi i}e^{zf(w)}\,dw\right|<\sqrt{\frac{5\pi^3}{8z\operatorname{sh}\alpha}}\,e^{zf(-\alpha)-\frac{N^3}{54}}。\tag{101}$$

最後，在區間 $\alpha-\varepsilon\leqslant u<\infty,\ v=\pi$ 中有

$$\Phi(w)=-\operatorname{sh}u-u\operatorname{ch}\alpha<-u\operatorname{ch}\alpha<f(-\alpha)-\frac{N^3}{54z}-u\operatorname{ch}\alpha。$$

因此對(97)式中最後一積分可作如下的估計：

$$\left|\int_{\alpha-\varepsilon+\pi i}^{\infty+\pi i}e^{zf(w)}\,dw\right|<e^{zf(-\alpha)}\frac{e^{-\frac{N^3}{54}}}{z\operatorname{ch}\alpha}。\tag{102}$$

注意：(101)和(102)的估計容易再與以改善。

現在回到(92)式。利用(97)及不等式(99)，(100)，(101)和(102)，我們得到

$$H_p^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi i}\left[\int_{-\alpha-\varepsilon}^{-\alpha+\varepsilon}e^{zf(w)}dw+\omega\right],\tag{103}$$

其中

$$\omega<e^{zf(-\alpha)}\left[\frac{3\operatorname{sh}\alpha}{5N\operatorname{ch}\alpha}e^{-0.75N}+\frac{\operatorname{sh}\alpha}{3N\operatorname{ch}\alpha}e^{-N}+\left(\frac{4.4}{\sqrt{z\operatorname{sh}\alpha}}+\frac{1}{z\operatorname{ch}\alpha}\right)e^{-\frac{N^3}{54}}\right]。\tag{104}$$

(103)式中的積分我們已經在[80]中研究過，並且知道他可以表示如下：

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\alpha-\varepsilon}^{-\alpha+\varepsilon}e^{zf(w)}\,dw=-\frac{i}{\sqrt{\pi}}e^{zf(-\alpha)}\left(\frac{2}{z\operatorname{sh}\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1}{8}\left(1-\frac{5\operatorname{ch}^2\alpha}{3\operatorname{sh}^2\alpha}\right)\frac{1}{z\operatorname{sh}\alpha}+\omega'\right],\tag{105}$$

其中

$$|\omega'|<\frac{e^{-N}}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{N^{\frac{3}{2}}\operatorname{ch}^2\alpha}{6z\operatorname{sh}^3\alpha}\right)+\left(\frac{2}{z\operatorname{sh}\alpha}\right)^2\left(\frac{1}{8}+\frac{\operatorname{ch}^2\alpha}{25\operatorname{sh}^2\alpha}+\frac{\operatorname{ch}^4\alpha}{8\operatorname{sh}^4\alpha}\right)。\tag{106}$$

考慮(103)式中的 ω，可知函數 $H_p^{(1)}(z)$ 可用(105)式的右邊來表示，但其中的 ω' 應改爲

$\omega'+\omega''$，其中 ω'' 滿足下面的條件：

(107)
$$\left|\omega''\right| < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z\,\mathrm{sh}\,\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{3\,\mathrm{sh}\,\alpha}{5N\,\mathrm{ch}\,\alpha}e^{-0.75N}+\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{8N\,\mathrm{ch}\,\alpha}e^{-N}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{4.4}{\sqrt{z\,\mathrm{sh}\,\alpha}}+\frac{1}{z\,\mathrm{sh}\,\alpha}\right)e^{-\frac{N^2}{54}}\right]。$$

上式右邊極易估計。為此，祇須利用可以從(95)式導出的等式

$$\left(\frac{z\,\mathrm{sh}\,\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{N\,\mathrm{ch}\,\alpha}=\frac{\sqrt{N}}{6},$$

利用這等式可以比較(106)和(107)兩式右邊的大小。這時可知祇要 $N\geqslant 8$ 則 (106) 式右邊的數值就大於(107)式右邊的數值。因此當 $N\geqslant 8$ 時 $H_p^{(1)}(z)$ 的表示式［(105)的形式］中的誤差可由(106)式的第二項決定。注意：在我們的演算中條件 $N\geqslant 8$ 和

(108)
$$z\,\mathrm{sh}\,\alpha\geqslant 8(z\,\mathrm{ch}\,\alpha)^{\frac{1}{3}}$$

相抵，即和

(109)
$$\sqrt{p^2-z^2}\geqslant 8\,p^{\frac{1}{3}}$$

相抵。用類似的方法可以算出包含更高階無窮小的項。我們的最後結果是❶

(110)
$$H_p^{(1)}(z)\sim -i\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\,e^{-s+p\,\mathrm{arcth}\frac{s}{p}}G(-s)$$
$$H_p^{(2)}(z)\sim i\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\,e^{-s+p\,\mathrm{arcth}\frac{s}{p}}G(-s)$$

及

(111)
$$J_p(z)\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\,e^{s-p\,\mathrm{arcth}\frac{s}{p}}\,G(s),$$

其中
$$s^2=p^2-z^2$$

(112)
$$G(s)=1+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{s}-\frac{5p^2}{3s^3}\right)+\frac{1\cdot 3}{8^2}\left(\frac{3}{2s^2}-\frac{77p^2}{9s^4}+\frac{385p^4}{54s^6}\right)+\cdots$$

這級數對於任何的 s 和 p 都不收斂。但若 s 和 p 相當大的話，那末他的項起先是逐漸減少，後來就開始增加。級數 (112) 常應在那還是在減少的項被截斷。可以證明如果照這個方法截斷級數(112)，並且不等式

(113)
$$\sqrt{p^2-z^2}=s>2.5p^{\frac{1}{3}}\ ❷$$

也滿足，則(111)式所決定的貝塞爾函數的漸近式其準確程度大於保留着的最後一項的數值。

❶ 參考 Watson, A Treatise on the theory of Bessel functions。

❷ 注意：這條件祇當 $p>(2.5)^3\approx 16$ 時成立。

要知道當 $z<p$ 時貝塞爾函數的明確行徑，可以利用展開式

$$\operatorname{arc\,th}\frac{z}{p}=\frac{z}{p}+\frac{z^3}{3p^3}+\cdots。$$

由此可知

$$-z+p\operatorname{arc\,th}\frac{z}{p}=\frac{(p^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}{3p^2}+\cdots$$

當 z 從與 p 相近的數值減小到零時其值增加。由(110)和(111)可知對於如此的 z 的變動漢閉爾函數將按指數律增加，而貝塞爾函數則將按指數律減少。在研究級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n J_n(\rho)$$

的收斂性時上述性質特別有用。若 $|c_n|<Mn^{\sigma}$ $(\sigma>0)$，則當 $n\gg\rho$ 時這級數常收斂得很快。

2. $\xi<1$，$z\gg1$ 的情形。

現在鞍點的坐標是 $w_0=\pm\beta i$，其中 $\cos\beta=\xi$ $(\beta>0)$。固定線路由下列方程決定：

$$\text{(114)}\qquad \begin{aligned}\operatorname{ch} u\sin v&=(v-\beta)\cos\beta+\sin\beta,\\ \operatorname{ch} u\sin v&=(v+\beta)\cos\beta-\sin\beta,\end{aligned}$$

他們關於坐標軸是對稱的，並且依次通過鞍點 $\pm\beta i$ 和 ∞，如圖 77 所示，其中箭頭所指表示 $R[f(w)]$ 減少的方向。

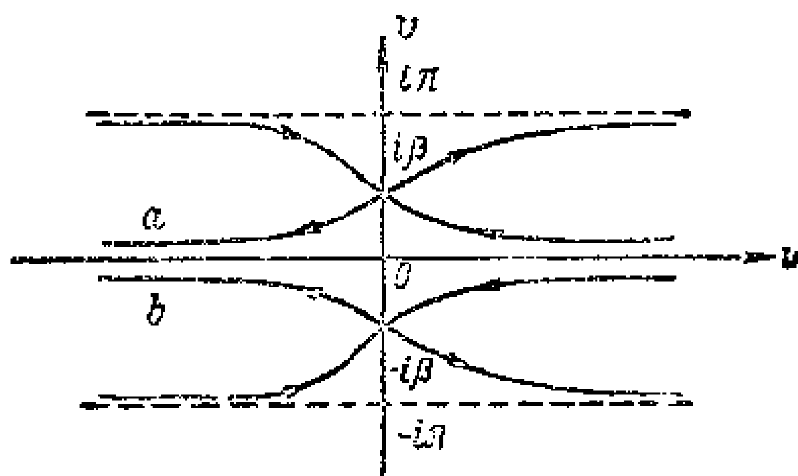


圖　77

若取(87)式中的積分線路 C_1 和 C_2 依次是連接$(-\infty)$與$(\infty,+\pi i)$和$(-\infty)$與$(\infty,-\pi i)$的固定曲線(a)和(b)，則漢閉爾函數的主要部分就是在鞍點 $\pm\beta i$ 的鄰近線路上的積分。由此可知兩漢閉爾函數的數值與他們的和同階。從而要得到函數 $J_p(z)$ 的漸近表示就不必施行其他的計算，祇要利用公式

$$J_p(z)=\frac{1}{2}[H_p^{(1)}(z)+H_p^{(2)}(z)]$$

好了。要得到這些漸近公式仍可用最速下降法。茲列舉其結果，不再證明：

$$
(115) \quad \begin{cases} H_p^{(1)}(z) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi s}}\, G(si)e^{\varphi i} \\ H_p^{(2)}(z) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi s}}\, G(-si)e^{-\varphi i} \\ J_p(z) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi s}}(G_1\cos\varphi + G_2\sin\varphi), \end{cases}
$$

其中

$$
(116) \quad z^2 = p^2 + s^2;\ G(si) = G_1 - G_2 i;
$$

$$
\varphi = s - p\,\mathrm{arc\,th}\frac{s}{p} - \frac{\pi}{4},
$$

又 $G(s)$ 卽級數(112)。可證若

$$
(117) \quad \sqrt{z^2 - p^2} = s > 2.5 p^{\frac{1}{3}} \quad 又\ s > 6
$$

且在 G, G_1 和 G_2 的展開式中祇保留那些還是在繼續減少的項，則在 (115) 式中誤差不大於保留着的最後一項的數值。易見若 $z \gg p$ 則(115)中前二式可化爲[112]中已有的漸近式。

現在假設在 G, G_1 和 G_2 的展開式中祇保留第一項，並注意當 $z \gg p$ 時成立下面的近似等式

$$
s \approx z \ 和\ \mathrm{arctg}\frac{s}{p} \approx \mathrm{arctg}\frac{z}{p} \approx \frac{\pi}{2},
$$

可由(115)式得出：

$$
(118) \quad \begin{cases} H_p^{(1)}(z) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \\ H_p^{(2)}(z) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\, e^{-i\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \\ J_p(z) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \dfrac{p\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)。 \end{cases}
$$

3. $\xi \approx 1$, $p \gg 1$ 的情形。

固定線路和鞍點的位置可以由前兩種情形將 $\xi \to 1$ 而得。這時鞍點和原點極爲接近，沿着固定線路被積分函數變動得很快。雖然如此，因爲條件 (113) 不成立，所以從前的計算都失效了。

В. А. 富克①院士首先有系統地研究當條件

$$
(119) \quad \sqrt{|p^2 - z^2|} \approx |p|^{\frac{1}{3}} \qquad p \gg 1
$$

成立時貝塞爾函數的漸近表示式。現在我們以函數 $H_p^{(1)}(z)$ 爲例敍述他的研究方法。

① В. А. 富克。貝塞爾函數的另一漸近表示。ДАН. 1934，卷 1，第三期，pp. 97—99。

В. А. 富克。環繞地球表面上無線電波的繞射。

В. А. 富克。埃里函數表。

若在(87)的第一式中改 w 爲$(-w)$，則得

$$H_p^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_C e^{-z\,\mathrm{sh}\,w+pw}\,dw, \tag{120}$$

其中積分路線 C 連接 $(-\infty,-\pi i)$ 和 $(+\infty)$。

(120)式中被積分函數的鞍點和原點極爲接近，固定線路可變形爲如下的線路：從 $(-\infty,-)\pi i$ 沿直線 $I_m(w)=-\pi$ 到 $w_1=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\pi i$，然後從 w_1 沿直線到原點，最後從原點沿正實軸到$(+\infty)$。沿這種積分路線隨着與原點距離的增加函數就很快地減少。這樣，積分(120)的主值就由原點鄰近的小段線路上的積分決定。以 l_ε 記這小段線路。我們有：

$$H_p^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi i}\left[\int_{l_\varepsilon} e^{-z\,\mathrm{sh}\,w+pw}\,dw+w_\varepsilon(z,p)\right], \tag{121}$$

其中 $w_\varepsilon(z,p)$ 的數值可用 $\xi>1$ 時的辦法來估計。當 z 甚大時 w_ε 的值小得可以忽略不計。

置

$$p=z+\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}}t, \tag{122}$$

並導入另一積分變數

$$\tau=\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}}w, \tag{123}$$

則得

$$-z\,\mathrm{sh}\,w+pw=t\tau-\frac{\tau^3}{3}-\frac{z}{120}\left(\tau\sqrt[3]{\frac{2}{z}}\right)^5-\frac{z}{5040}\left(\tau\sqrt[3]{\frac{2}{z}}\right)^7-\cdot \tag{124}$$

和

$$e^{-z\,\mathrm{sh}\,w+pw}=e^{t\tau-\frac{\tau^3}{3}}\left[1-\frac{1}{60}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\tau^5+\cdots\right]。 \tag{125}$$

注意：上式右邊的展開式在 l_ε 上收斂得很快。

要求 $H_p^{(1)}(z)$ 的漸近公式，可將(125)式代入(121)式。這樣，沿 l_ε 的積分就可寫成：

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\left[\int_{L_\varepsilon} e^{t\tau-\frac{\tau^3}{3}}d\tau-\frac{1}{60}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\int_{L_\varepsilon}\tau^5 e^{t\tau-\frac{\tau^3}{3}}d\tau+\cdots\right], \tag{126}$$

其中數值甚小的各項略去未寫。注意：上式中的 L_ε 是由連接 $\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\pi i\right)\varepsilon$ 與原點的直線段和連接原點與 $\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\varepsilon$ 的直線段所組成。

最後，記 Γ 爲半射線 $\arg\tau=\frac{4\pi}{3}$ 和正實軸所成的線路。於是(126)式中的第一個積分就可以改寫成：

$$\int_{L_\varepsilon} e^{t\tau-\frac{\tau^3}{3}}d\tau=\int_\Gamma e^{t\tau-\frac{\tau^3}{3}}d\tau-\int_{\Gamma-L_\varepsilon} e^{t\tau-\frac{\tau^3}{3}}d\tau,$$

同樣，其中的第二個積分也是如此。

線路 Γ 中不屬於 L_ε 的部分(記爲$\Gamma-L_\varepsilon$)上的積分容易估計，當 z 的數值很大時這積分

的數值小得可以忽略不計。因此當 $z\gg 1$ 時 (126) 式中的積分線路 L_5 可改以 Γ 來替代。結果我們就得到如下的漸近公式：

$$H_\nu^{(1)}(z)=\frac{-i}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\left[w(t)-\frac{1}{60}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{d^5w(t)}{dt^5}+\cdots\right], \tag{127}$$

其中

$$w(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\Gamma e^{t\tau-\frac{\tau^3}{3}}d\tau \tag{128}$$

即 B. A. 富克所研究過的埃里函數。對這函數已有現成的表造出來了。最後，注意：要得到 (127) 式中剩餘項的估計公式亦不困難。詳細計算可仿以前用過的估計方法去做。

[80] 中的例題以及本段的材料都是 Г. И. 彼得拉申教授所寫的。

153. 貝塞爾函數和拉普拉斯方程　解決理論物理學中的問題時常遇到貝塞爾方程。由於篇幅的限制我們不能詳細研究貝塞爾函數的應用。現在祇敍述一些聯繫貝塞爾方程與理論物理學的諸基本方程的重要事實。

先從拉普拉斯方程開始。我們從前研究過在球坐標下的拉普拉斯方程，並由此導出球函數。同樣，寫出圓柱坐標下的拉普拉斯方程來，並應用分離變數的方法，就可得出貝塞爾函數來。

圓柱坐標下的拉普拉斯方程為：

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+\rho\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0。$$

現在要求這方程的形式如

$$U=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

的解，其中第一個是 ρ 的函數，第二個是 φ 的函數，第三個是 z 的函數。代入方程中，然後分離變數，可得：

$$\frac{\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right]}{R(\rho)}+\frac{1}{\rho}\frac{\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}}{\Phi(\varphi)}+\rho\frac{\frac{d^2Z(z)}{dz^2}}{Z(z)}=0。$$

上式左邊第二和第三項中後面的分式都應等於常數，因為自變數 φ 只在前一分式中出現，z,ρ 在後一分式中出現。現在分別令這兩個分式等於常數 $(-p^2)$ 和 (k^2)，那末就得到如下的三個方程式：

$$\Phi''(\varphi)+p^2\Phi(\varphi)=0;\quad Z''(z)-k^2Z(z)=0;$$

$$\frac{d}{d\rho}[\rho R'(\rho)]-\frac{p^2}{\rho}R(\rho)+k^2\rho R(\rho)=0$$

或

$$R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)+\left(k^2-\frac{p^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0。$$

這裏假設常數 p 和 k 都不等於零。由上列前兩方程可得

$$\Phi(\varphi)=e^{\pm ip\varphi}\ \text{或}\ \Phi(\varphi)=\frac{\cos p\varphi}{\sin p\varphi}$$

$$Z(z)=e^{\pm kz}。$$

最後，由第三個方程可得 $Z_p(k\rho)$，其中 $Z_p(z)$ 是參數為 p 的貝塞爾方程的任一解。如欲得到單值的解，則應取 p 為整數 n。

這樣，我們就得到如下形式的拉普拉斯方程的解：

(129)
$$e^{\pm kz}\frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi}[C_1J_n(k\rho)+C_2N_n(k\rho)],$$

其中 n 是任意整數，k 為任意常數。

若 $k=0$，則代替 $Z(z)=e^{\pm kz}$ 應有 $Z(z)=1$ 或 $Z(z)=z$，而第三方程的解為 $R(\rho)=\rho^{\pm p}$。若 $p=0$ 則應置 $\Phi(\varphi)=A+B\varphi$。若 $p=k=0$，則 $R(\rho)=C+D\lg\rho$。當 $n=0$ 時(129)的解成為

(130)
$$e^{\pm kz}[C_1J_0(k\rho)+C_2N_0(k\rho)],$$

這解與角度 φ 無關。當研究有對稱軸的質量的勢函數時這種解極為緊要。如果我們想得到當 $\rho=0$ 時為有限的解，則於(130)式中應置 $C_2=0$，於是得到如下形式的解：

(131)
$$e^{\pm kz}J_0(k\rho)。$$

從這個拉普拉斯方程的解可以得到解 $\frac{1}{r}$，他在牛頓勢函數的理論中有着基本的重要性。詳細說來，即成立

(132)
$$\int_0^\infty e^{-kz}J_0(k\rho)dk=\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}=\frac{1}{r}\qquad(z>0),$$

這式子在勢函數的理論中有許多的應用。要證明他，可以利用(42)式而得：

$$e^{-kz}J_0(k\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-kz-ik\rho\sin\varphi}d\varphi,$$

關於 k 積分，得：

$$\int_0^\infty e^{-kz}J_0(k\rho)\,dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{e^{-kz-ik\rho\sin\varphi}}{-z-i\rho\sin\varphi}\right]_{k=0}^{k=\infty}d\varphi$$

或

$$\int_0^\infty e^{-kz}J_0(k\rho)\,dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{z+i\rho\sin\varphi}\,d\varphi。$$

應用[57]的方法算出上式右邊的積分，即得(132)式。

若以常數$(-k^2)$代替常數$(+k^2)$，則$e^{\pm kz}$改爲$\cos kz$和$\sin kz$，而$J_p(k\rho)$和$N_p(k\rho)$改爲$I_p(k\rho)$和$K_p(k\rho)$。

154. 圓柱坐標下的波動方程　現在考察波動方程：

(133)
$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\Delta U,$$

其中
$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

我們要求這方程的形式如

(134)
$$U=e^{-i\omega t}V(x,y,z)$$

的解。

代入(133)式，得到V所滿足的方程

(135)
$$\Delta V+k^2V=0,$$

其中

(136)
$$k^2=\frac{\omega^2}{a^2}。$$

方程(135)有時亦稱爲赫姆荷茲方程。若取這方程的任何一解代入(134)式，分出實數部分，則得波動方程的實解，由於和時間有關的緣故，他表示頻率爲ω的調和振動。在個別的情形下這解也可以表示駐波，而在別的情形又可以表示傳遞波。首先，在最簡單的情形下來解釋這些概念。例如，若取乘積(134)爲$e^{-i\omega t}\sin kx$，則其實數部分$\cos\omega t\sin kx$決定一駐波。同樣由乘積$e^{-i\omega t}\cos kx$亦可得一駐波。如果我們取乘積$e^{-i\omega t}e^{ikx}$，則其實數部分$\cos(kx-\omega t)$決定一正弦波，他以速度$\frac{\omega}{k}$沿着X軸的方向傳播。當應用貝塞爾函數時$J_p(k\rho)$與$N_p(k\rho)$和$\cos kx$與$\sin kx$相當，而$H_p^{(1)}(k\rho)$與$H_p^{(2)}(k\rho)$和e^{ikx}與e^{-ikx}相當。

回到方程(135)，寫出圓柱坐標下的拉普拉斯運算子,並設 V 與 z 無關[II, 178]：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}+k^2V=0。$$

從前我們已經用分離變數的辦法解過這種方程,並知其解具形式 $Z_p(k\rho)\begin{matrix}\cos p\varphi\\ \sin p\varphi\end{matrix}$, 其中 $Z_p(z)$ 是參數爲 p 的貝塞爾方程的任一解。

置 $p=n$ 爲整數,則得單值的解。若取 $Z_n(k\rho)$ 爲貝塞爾函數,則所得的解爲

$$e^{-i\omega t}J_n(k\rho)\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix},$$

其實數部分
$$\cos \omega t J_n(k\rho)\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix}$$

決定一駐波。若取 V 爲第一個漢開爾函數,則於漢開爾函數當 ρ 甚大時的漸近表示式中取其第一項,可得如下的漸近表示：

$$e^{-i\omega t}H_n^{(1)}(k\rho)=e^{i\left(k\rho-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\omega t\right)}\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}[1+O(\rho^{-1})],$$

就是說,有一個無限遠處的傳遞波,其位相可在無限遠處決定。對於這類解我們說他們是滿足輻射原理,如果取 $e^{i\omega t}$ 以代替 $e^{-i\omega t}$, 那末要滿足輻射原理的話第二個因子就應取第二個漢開爾函數,因爲由漢開爾函數的漸近表示式我們有如下的漸近等式：

$$e^{i\omega t}H_n^{(2)}(k\rho)=e^{i\left(\omega t-k\rho+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}[1+O(\rho^{-1})]。$$

現在再看函數 V 與坐標 z 有關時的一般情形。這時方程(135)具如下的形式[II, 119]：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+k^2V=0。$$

我們要求形式爲

$$V=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

的解。

應用通常的分離變數的方法得到方程的解爲：

$$Z_p(\sqrt{k^2-h^2}\rho)e^{\pm ihz}\begin{matrix}\cos p\varphi\\ \sin p\varphi\end{matrix}, \tag{137}$$

其中 $Z_p(z)$ 是貝塞爾方程的任一解。當 $k^2-h^2=\lambda^2$ 並令 $p=n$ 爲正整數，則此時解爲單値，我們有：

(138) $J_n(\lambda\rho)e^{\sqrt{\lambda^2-k^2}z}\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix}$ 和 (139) $H_n^{(1)}(\lambda\rho)e^{\sqrt{\lambda^2-k^2}z}\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix}$。

第一個解當 $\rho=0$ 時爲有限，決定一駐波。第二個解滿足輻射原理。當振動發生的區域是包含軸 $\rho=0$ 的圓柱之內的一部分時我們通常用第一類解，而當振動發生的區域是在圓柱的外部時則用第二類解。在繞射問題中還常用到多値解，其對應的 p 不是整數。

現在考察一個特殊形式的問題。方程(135)顯然有一解 $e^{ikx}=e^{ik\rho\cos\varphi}$。以 $e^{-i\omega t}$ 乘之，得解 $e^{i(kx-\omega t)}$，他表示沿着 X 軸傳播的初等平面波。假設這平面波並不在整個空間中存在，而祇在圓柱 $\rho=a$ 的外部存在，並且在這圓柱上應滿足邊値條件：

$$V=0 \quad (當\ \rho=a)。$$

要使這邊値條件滿足，我們應該在方程(135)的解 e^{ikx} 上再添加這方程的另一解（由繞射的結果所得的附加微擾），他應該滿足輻射原理，並且是單値的。記住上面所說的以及基本解與 z 無關的事實，用指數函數代替三角函數，我們現在要尋求這種形式的附加解，他是許多對應於 $\lambda=k$ 的解(139)的線性結合：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nH_n^{(1)}(k\rho)e^{in\varphi}。 \qquad (\rho>a) \tag{140}$$

爲此，祇要用邊値條件來決定係數 a_n 好了。回憶(37)式，令其中 $t=ie^{i\varphi}$，$z=k\rho$，則可將已給的基本解寫成：

$$e^{ikx}=e^{ik\rho\cos\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}i^nJ_n(k\rho)e^{in\varphi}。 \tag{141}$$

由邊値條件應有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^nJ_n(ka)e^{in\varphi}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nH_n^{(1)}(ka)e^{in\varphi}=0。$$

這樣，我們就求得諸係數的値爲：

$$a_n=-i^n\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}。$$

而問題的最後解答應是：

$$V=e^{ikx}-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}i^n\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}H_n^{(1)}(k\rho)e^{in\varphi}。 \qquad (\rho>a)$$

上述問題在電磁波關於無限長圓柱導體的繞射的一些特別情形中有應用。其中所得到級數祇在波長較長的場合有實用的便利。

比較初等平面波的繞射問題的解和圓膜振動問題的解是一件有趣的事[II, 178]。首先，注意在剛才看過的平面波的繞射問題中 k 是已給的（由進入的波的頻率 ω 決定），而在圓膜振動問題中他由邊值條件決定。在繞射問題中展開式的係數由邊值條件決定，而在圓膜振動的問題中展開式的係數則由初始條件，即當 $t=0$ 時的振動情況所決定。在繞射問題中我們根本就沒有初始條件，因爲我們並不研究具有任意初始擾動的一般繞射問題，而祇研究具有已給頻率 ω 的現成正弦曲線系統。

155. 球坐標下的波動方程　現在考察在球坐標下的方程(135)。這時他具有形式：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_1 V+k^2V=0.$$

我們要求通常形式的解：

$$V=f(r)Y(\theta,\ \varphi)。\tag{142}$$

代入方程，然後分離變數，得

$$\frac{f''(r)}{f(r)}+\frac{2}{r}\frac{f'(r)}{f(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{\Delta_1 Y(\theta,\ \varphi)}{Y(\theta,\ \varphi)}+k^2=0,$$

其中 $\Delta_1 Y$ 由[135]的(71)式所定義。這樣，我們就得到下面兩個方程：

$$\Delta_1 Y+\lambda Y=0\tag{143}$$

和

$$f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)f(r)=0。\tag{144}$$

方程(143)和我們研究球函數時所得到的是一樣的。假設解爲單值連續，得到常數 λ 的可能值：

$$\lambda_n=n(n+1),\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

和他們對應的方程(143)的解即通常的球函數 $Y_n(\theta,\varphi)$。方程(144)可以改寫爲

$$f_n''(r)+\frac{2}{r}f_n'(r)+\left(k^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)f_n(r)=0.\tag{145}$$

藉下式導入另一未知函數 $R(r)$ 以代替 $f(r)$：

$$f_n(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}R_n(r)。$$

代入(145)式，得到 $R_n(r)$ 所滿足的方程：

$$R_n''(r)+\frac{1}{r}R_n'(r)+\left[k^2-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]R_n(r)=0,$$

因此知道 $R_n(r)$ 是 $Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)$，其中 $Z_{n+\frac{1}{2}}(r)$ 是參數爲 $p=n+\frac{1}{2}$ 的貝塞爾方程的解。由(142)式得

$$V=\frac{Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}Y_n(\theta,\varphi)。\qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{146}$$

注意：我們現在所遇到的貝塞爾方程剛好是他的解可以表示爲初等函數的有限形式的情形。和前一段一樣，解 $Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ 的選取係由問題中的物理條件所決定。通常我們考察下列三個函數：

$$\begin{cases}\zeta_n^{(1)}(\rho)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2\rho}}H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(\rho);\ \zeta_n^{(2)}(\rho)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2\rho}}H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(\rho);\\ \psi_n(\rho)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2\rho}}J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)=\dfrac{1}{2}[\zeta_n^{(1)}(\rho)+\zeta_n^{(2)}(\rho)],\end{cases} \tag{147}$$

其中常數因子 $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 係因便利計算而添上的。特別，當 $n=0$ 時由[148]的公式可得：

$$\zeta_0^{(1)}(\rho)=-i\frac{e^{i\rho}}{\rho};\quad \zeta_0^{(2)}=i\frac{e^{-i\rho}}{\rho};\quad \psi_0(\rho)=\frac{\sin\rho}{\rho}。$$

與角度 φ 無關的特別解爲：

$$\frac{Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}P_n(\cos\theta),$$

當 $n=0$ 時有

$$\frac{Z_{\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}。$$

要得到基本方程(133)的解，我們還應該用 $e^{\pm i\omega t}$，或是用 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 來乘(146)式，其中 ω 與 k 之間存在關係(136)。若置

$U=T(t)V(x,y,z)$，代入(133)式，應用分離變數的方法可得 V 所滿足的方程爲(135)，而 $T(t)$ 所滿足的方程爲

$$T''(t)+a^2k^2T(t)=0, \qquad (a^2k^2=\omega^2)$$

這樣，所得到的與 t 有關的基本方程的解仍爲(134)。直到現在我們都假設 k (或 ω) 不等於零。若 $k=0$，則應取 $T(t)=A+Bt$，而 V 所滿足的就是拉普拉斯方程 $\Delta V=0$。這樣，我們還是得到形式如

$$(A+Bt)r^nY_n(\theta,\varphi) \tag{148}$$

的解。他們應該加入(146)一起去。

這裏，和前一段圓柱坐標的情形一樣，也可以求一下具有已給的邊值和初始條件的球內振動問題的解答，同樣，還有平面波關於球的繞射問題的解答。

首先，假設我們要求波動方程：

$$\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=a^2\,\Delta U \tag{149}$$

的解要滿足初始條件：

$$U\Big|_{t=0}=f_1(r,\theta,\varphi);\quad \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0}=f_2(r,\theta,\varphi) \qquad (r<a) \tag{150}$$

和邊值條件：

$$\frac{\partial U}{\partial r}\Big|_{r=a}=0。 \tag{151}$$

回到(146)，記住當 $r=0$ 時解爲有限的要求，我們取 $Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ 等於 $J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$，且當 n 已給時用邊值條件：

$$\frac{d}{dr}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}\Big|_{r=a}=0 \text{ 或 } J_{n+\frac{1}{2}}(ka)-2ka\,J'_{n+\frac{1}{2}}(ka)=0 \tag{152}$$

來決定 k。

以後我們記這方程的正根爲

$$k_m^{(n)}。 \qquad (m=0,1,2,\cdots)$$

此外，當 $n=0$ 時解(148)也滿足邊值條件(151)。按照福里哀的方法我們應該求如下形式的解：

$$U=A+Bt+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[Y_n^{(1)}(\theta,\varphi)\cos ak_m^{(n)}t+Y_n^{(2)}(\theta,\varphi)\sin ak_m^{(n)}t\right]\times \tag{153}$$
$$\times\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_m^{(n)}r)}{\sqrt{r}}。$$

剩下來就是要用初始條件(150)來決定 n 階的球函數 $Y_n^{(1)}(\theta,\varphi)$ 和 $Y_n^{(2)}(\theta,\varphi)$。這

時注意方程(153)有和我們在［138］中所研究過的方程相同的形式，因此利用貝塞爾函數的正交性我們不難決定上述的球函數。詳細計算不多說了。

現在回到初等平面波關於球面 $r=a$ 的繞射問題，這波是由方程(149)的解 $e^{i(kz-\omega t)}$ 所決定的，邊值條件是

$$U\Big|_{r=a}=0。$$

在目前的情況下，我們假設這波是沿 Z 軸傳播出去的。在球坐標之下，代替(141)式應有：

(154)
$$e^{ikz}=e^{ikr\cos\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n\psi_n(kr)P_n(\cos\theta),$$

其中 $P_n(x)$ 是勒上特多項式。這公式的證明從略。按照輻射原理，我們應求形式如

(155)
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\theta)$$

的附加微擾。

諸係數 a_n 可由下面的條件決定：兩解(154)與(155)的和當 $r=a$ 時應等於零。由此可得

$$a_n=-\frac{(2n+1)i^n\psi_n(ka)}{\zeta_n^{(1)}(ka)}。$$

III　埃爾密脫多項式和拉蓋爾多項式

156．線振子與埃爾密脫多項式　已知舒留丁蓋方程爲

$$\frac{h^2}{2m}\Delta\psi+(E-V)\psi=0。$$

現在假設函數 ψ 僅和 x 有關，勢函數 V 由公式 $V=\frac{k}{2}x^2$ 所定義，他對應於彈性力 $f=-kx$ 的情形。這樣，我們就得到如下形式的方程：

$$\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left(E-\frac{k}{2}x^2\right)\psi=0,$$

參數 E 的值應由這樣的條件決定：卽方程的解應在整個區間 $-\infty<x<+\infty$ 中爲有限。引進兩個新的常數

(1)
$$\alpha^2=\frac{mk}{h^2};\quad \lambda=\frac{2mE}{h^2}。\qquad(\alpha>0)$$

其中 α^2 是已給的，而 λ 則取參數 E 的位置而代之。方程現在可以改寫成：

(2)
$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+(\lambda-\alpha^2x^2)\psi=0。$$

這線性方程以 $x=\infty$ 爲非正則奇異點。下面我們要仿照[105]中的辦法去做，即設

$$\psi=e^{\omega(x)}u(x),$$

而函數 $\omega(x)$ 應如此決定，使得在微分方程中 $u(x)$ 的係數不含 x^2。微分 ψ，然後代入方程(2)，得到 $u(x)$ 的方程爲：

$$u''(x)+2\omega'(x)u'(x)+[\omega''(x)+\omega'^2(x)+\lambda-\alpha^2x^2]u(x)=0,$$

要免除 $-\alpha^2x^2$ 這一項可設

$$\omega(x)=-\frac{\alpha}{2}x^2,$$

這裏取負號的目的是要在 $x\to\pm\infty$ 時得到衰減(阻尼)。這樣，就有

(3)
$$\psi(x)=e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}u(x),$$

其中 $u(x)$ 滿足方程

(4)
$$\frac{d^2u}{dx^2}-2\alpha x\frac{du}{dx}+(\lambda-\alpha)u=0。$$

若對適當選擇的參數 λ 的數值這方程有多項式的解，那末這時 $\psi(x)$ 顯然就在無限遠處衰減，從而就滿足已定的邊值條件。因此，我們現在要來求方程(4)的多項式解。引進新的自變數

$$\xi=\sqrt{\alpha}x$$

以代 x，於是有

$$\frac{du}{d\xi}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{du}{dx};\quad \frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2u}{d\xi^2}\alpha,$$

代入方程(4)，得到 u 所滿足的方程

(5)
$$\frac{d^2u}{d\xi^2}-2\xi\frac{du}{d\xi}+\left(\frac{\lambda}{\alpha}-1\right)u=0。$$

原點是這方程的尋常點，故可求這方程的冪級數形式的解：

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\xi^k$$

其最先兩係數 a_0 和 a_1 是任意的。代入方程(5)，得到逐步決定諸係數的關係式：

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}-2ka_k+\left(\frac{\lambda}{\alpha}-1\right)a_k=0,$$

由是

$$a_{k+2}=\frac{2k-\left(\frac{\lambda}{\alpha}-1\right)}{(k+2)(k+1)}a_k。\qquad (k=0,1,2,\cdots) \tag{6}$$

現在說明怎樣才能得到 n 次多項式的解。假設由條件

$$\frac{\lambda}{\alpha}-1=2n,$$

選定參數 λ，即

$$\lambda_n=(2n+1)\alpha。 \tag{7}$$

這時由(6)式相繼可得

$$a_{n+2}=a_{n+4}=a_{n+6}=\cdots=0。 \tag{8}$$

若 n 爲偶數，則設 $a_1=0$ 和 $a_0\neq0$。由(6)式即得 $a_1=a_3=a_5=\cdots\cdots=0$，而所有足號爲偶數的係數從 a_0 起到 a_n 爲止都不等於零，但由(8)，其餘的也都等於零。若 n 爲奇數，則要反過來設 $a_0=0$ 而 $a_1\neq0$。這樣，我們就得到了多項式的解，而(7)式決定對應的參數 λ 的特徵值。將這些特徵值代入方程(5)，記所得的多項式解爲 $H_n(\xi)$，則 $H_n(\xi)$ 所滿足的微分方程爲

$$H_n''(\xi)-2\xi H_n'(\xi)+2nH_n(\xi)=0。 \tag{9}$$

由(3)式得到對應的函數

$$\psi_n(\xi)=e^{-\frac{1}{2}\xi^2}H_n(\xi)。 \tag{10}$$

多項式 $H_n(\xi)$ 通常稱爲埃爾密脫多項式，而函數(10)稱爲埃爾密脫函數。

將方程(2)中的自變數 x 改爲 ξ，即得埃爾密脫函數所滿足的方程：

(11) $$\frac{d^2\psi_n(\xi)}{d\xi^2}+\left(\frac{\lambda_n}{\alpha}-\xi^2\right)\psi_n(\xi)=0。\qquad\left(\frac{\lambda_n}{\alpha}=2n+1\right)$$

現在導出埃爾密脫多項式所滿足的一個簡單的公式。置 $v=e^{-\xi^2}$，從而 $v'=-2\xi v$。微分這等式 $(n+1)$ 次，應用萊伯尼茲關於乘積的微分公式，得

$$v^{(n+2)}=-2\xi v^{(n+1)}-(n+1)2v^{(n)}$$

或

(12) $$v^{(n+2)}+2\xi v^{(n+1)}+2(n+1)v^{(n)}=0。$$

引進另一函數 $K_n(\xi)=e^{\xi^2}v^{(n)}$，我們證明他滿足方程(9)。函數 $K_n(\xi)$ 顯然是 ξ 的 n 次多項式：

(13) $$K_n(\xi)=e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2})。$$

將 $v^{(n)}=e^{-\xi^2}K_n(\xi)$ 代入方程(12)，卽知 $K_n(\xi)$ 滿足方程(9)。

因此，除了一個常數因子以外，埃爾密脫多項式與函數 $K_n(\xi)$ 符合。注意：方程(9)的第二個解不能是多項式，因爲這方程以 $\xi=\infty$ 爲非正則奇異點。若要使最高次項的係數爲正，可以用常數因子 $(-1)^n$ 乘(13)。而定義埃爾密脫多項式爲：

(14) $$H_n(\xi)=(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2})。$$

最初三個埃爾密脫多項式爲：

$$H_0(\xi)=1;\quad H_1(\xi)=2\xi;\quad H_2(\xi)=4\xi^2-2。$$

一般，當 n 爲偶數時 $H_n(\xi)$ 祗含 ξ 的偶數冪，當 n 爲奇數時 $H_n(\xi)$ 祗含 ξ 的奇數冪。這事實由前面決定係數的方法容易知道。由(14)式知道多項式 $H_n(\xi)$ 中最高次項 ξ^n 的係數等於 2^n，因爲微分 $(-\xi^2)$ 得到 (-2ξ) 的緣故。

可證除了埃爾密脫函數以外沒有方程(2)的其他的解滿足本段中所述的邊值條件，證明從略。

157. 正交性質 考察兩個不同的埃爾密脫函數 $\psi_n(\xi)$ 和 $\psi_m(\xi)$，

對於他們成立：

$$\frac{d^2\psi_n(\xi)}{d\xi^2}+\left(\frac{\lambda_n}{\alpha}-\xi^2\right)\psi_n(\xi)=0$$

$$\frac{d^2\psi_m(\xi)}{d\xi^2}+\left(\frac{\lambda_m}{\alpha}-\xi^2\right)\psi_m(\xi)=0。$$

以 $\psi_m(\xi)$ 乘第一個方程，$\psi_n(\xi)$ 乘第二個方程，相減，然後在區間 $(-\infty,\ +\infty)$ 上積分，即得埃爾密脫函數的正交性：

(15)
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(\xi)\psi_m(\xi)d\xi=0,\qquad (n\neq m)$$

或由(10)有

(16)
$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}H_n(\xi)H_m(\xi)d\xi=0,\qquad (n\neq m)$$

這樣我們說，埃爾密脫多項式在區間 $(-\infty,\ +\infty)$ 中為正交，其權為 $e^{-\xi^2}$。現在計算當 $n=m$ 時積分(16)的值。由(14)式的定義，可寫：

$$I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}H_n^2(\xi)d\xi=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}H_n(\xi)\frac{d^n(e^{-\xi^2})}{d\xi^n}d\xi,$$

行分部積分，得

$$I_n=(-1)^nH_n(\xi)\frac{d^{n-1}(e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}}\Bigg|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty}+$$

$$+(-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}H_n'(\xi)\frac{d^{n-1}(e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}}d\xi。$$

積分出來的項是 $e^{-\xi^2}$ 和多項式的乘積，故當 $\xi=\pm\infty$ 時其值為零。繼續施行分部積分 $(n-1)$ 次，可得：

$$I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}H_n^{(n)}(\xi)e^{-\xi^2}d\xi,$$

因多項式 $H_n(\xi)$ 的最高次項係數為 2^n，故

$$I_n=2^nn!\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}d\xi,$$

最後由[II, 78]得

(17)
$$I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}H_n^2(\xi)d\xi=2^nn!\sqrt{\pi}。$$

可以作一個和福里哀級數類似的按照埃爾密脫多項式展開的級數，恰如我們在[133]中對勒上德多項式做了的一樣。但在這時我們應以無限區間$(-\infty, +\infty)$代替有限區間$(-1, +1)$。在這區間中展開式的形式如：

(18) $$f(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(\xi),$$

由於$H_n(\xi)$的正交性和(17)式的結果，上式中的係數

(19) $$a_n=\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\xi^2}H_n(\xi)d\xi。$$

當然要展開式(18)能成立，函數$f(\xi)$必需滿足一些條件。

158. 母函數 對(14)式中$e^{-\xi^2}$的導函數應用哥西公式將他表示爲路積分，可寫

$$e^{-\xi^2}H_n(\xi)=(-1)^n\frac{n!}{2\pi i}\int_{l_\xi}\frac{e^{-z^2}}{(z-\xi)^{n+1}}dz,$$

其中l_ξ是環繞$z=\xi$這點的任意單閉曲線。由

$$z=\xi-t$$

導入另一積分變數t以代z。完成積分中的變數變換以後再約去等式兩邊的公因子$e^{-\xi^2}$，得

$$\frac{1}{n!}H_n(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_0}\frac{e^{-t^2+2t\xi}}{t^{n+1}}dt,$$

其中l_0是環繞原點的單閉曲線。由這公式立刻知道$\frac{1}{n!}H_n(\xi)$是函數

(20) $$e^{-t^2+2t\xi}$$

關於t的麥克勞臨展開式中t^n的係數。就是說，函數(20)是埃爾密脫多項式用$\frac{1}{n!}$乘了以後的母函數：

(21) $$e^{-t^2+2t\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(\xi)t^n。$$

由這式子容易得到一些埃爾密脫多項式所滿足的基本關係。關於ξ微分(21)式，得

$$e^{-t^2+2t\xi}\cdot 2t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n'(\xi)t^n$$

或
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n!}H_n(\xi)t^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n'(\xi)t^n,$$

比較 t 的同次冪各項的係數，得到關係

(22)
$$H_n'(\xi)=2nH_{n-1}(\xi)。$$

現在關於 t 微分(21)式

$$e^{-t^2+2t\xi}\cdot(2\xi-2t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}H_n(\xi)t^{n-1}$$

或

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\xi}{n!}H_n(\xi)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n!}H_n(\xi)t^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}H_n(\xi)t^{n-1},$$

由此再比較係數，得到另一關係式：

(23)
$$H_{n+1}(\xi)=2\xi H_n(\xi)-2nH_{n-1}(\xi)。$$

最後，決定埃爾密脫多項式中的常數項，即 $H_n(0)$。當 n 爲奇數時其值顯然爲零，因爲這時埃爾密脫多項式祇含 ξ 的奇數冪的項。當 n 爲偶數時，首先，有 $H_0(0)=1$。再在(23)式中令 $n=1$，$\xi=0$，得

$$H_2(0)=-2H_0(0)=-2。$$

同樣，在這式中置 $n=3$，$\xi=0$，得

$$H_4(0)=-2\cdot3H_2(0)=2^2\cdot1\cdot3。$$

其次，當 $n=5$ 和 $\xi=0$ 時得

$$H_6(0)=-2^3\cdot1\cdot3\cdot5$$

一般

(24)
$$H_{2n}(0)=(-1)^n\cdot2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)。$$

還要注意：如果對(14)式應用若干次的羅爾定理，我們可以證明 $H_n(\xi)$ 的所有的零點都是實的，且互不相同。在[102]中我們曾用完全與此類似的方法證明 $P_n(x)$ 的所有的零點互不相同，且都在區間 $(-1, +1)$ 之中。

有些書中的埃爾密脫多項式的定義與我們上面所說的不同，他們定義埃爾密脫多項式爲

$$\widetilde{H}_n(\xi)=\frac{1}{n!}e^{\frac{\xi^2}{2}}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\frac{\xi^2}{2}}。$$

這定義和(14)式中的祇有常數因子的不同，一在多項式的前面，一在變數 ξ 的前面。

159. 抛物線坐標與埃爾密脫函數 注意在波動方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+k^2U=0 \tag{25}$$

中變數變換的一個特別情形。引進新的變數 ξ 和 η 以代替 x 和 y，假定其間的變換係由下式所決定：

$$x+iy=f(\zeta)=\varphi(\xi,\eta)+i\psi(\xi,\eta), \qquad (\zeta=\xi+i\eta)$$

其中 $f(\zeta)$ 是複變數 ζ 的正則函數。按照複合函數的微分規則，可得

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial \xi};\quad \frac{\partial U}{\partial \eta}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial \eta},$$

及

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2+2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)^2+$$

$$+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}.$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2+2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2+$$

$$+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}。$$

利用勾犀黎曼方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}=\frac{\partial \psi}{\partial \eta};\quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}=-\frac{\partial \psi}{\partial \xi},$$

以及 $\varphi(\xi,\eta)$ 和 $\psi(\xi,\eta)$ 都滿足拉普拉斯方程的事實，易證

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)^2\right]$$

或

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)|f'(\zeta)|^2。$$

考察一個特別情形

$$f(\zeta)=\frac{1}{2}(\xi+i\eta)^2;\quad f'(\zeta)=\xi+i\eta$$

或
$$\varphi(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2);\quad \psi(\xi,\eta)=\xi\eta。$$

新的坐標線 $\xi=C_1$ 和 $\eta=C_2$ 在 (x, y) 平面上是拋物線[32]，因此新的坐標 ξ 和 η 稱爲拋物線坐標。按上法在波動方程中完成變換以後，得：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}+k^2|f'(\zeta)|^2U=0,$$

故在新的坐標系統下方程(25)改爲：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}+k^2(\xi^2+\eta^2)U=0。\tag{26}$$

現在要找這方程的形式如

$$U=X(\xi)Y(\eta)$$

的解，其中 $X(\xi)$ 祇是 ξ 的函數，而 $Y(\eta)$ 祇是 η 的函數。

代入(26)式，然後分離變數，得

$$\frac{X''(\xi)}{X(\xi)}+k^2\xi^2=-\frac{Y''(\eta)}{Y(\eta)}-k^2\eta^2。$$

因此等式兩邊都應等於同一個常數，我們記這常數爲$(-\beta^2)$。這樣，就得到下列兩方程：

$$\begin{aligned}&X''(\xi)+(k^2\xi^2+\beta^2)X(\xi)=0;\\&Y''(\eta)+(k^2\eta^2-\beta^2)Y(\eta)=0。\end{aligned}\tag{27}$$

回憶埃爾密脫函數滿足方程(11)，即：

$$\psi_n''(\xi)+(2n+1-\xi^2)\psi_n(\xi)=0,\tag{28}$$

又滿足公式：

$$\psi_n(\xi)=e^{-\frac{\xi^2}{2}}H_n(\xi)=(-1)^n e^{\frac{\xi^2}{2}}\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2})。\tag{29}$$

考察(27)的第一個方程，由 $\xi_1=\sqrt{ik}\,\xi$ 引進新的變數 ξ_1 以代 ξ。於是

$$\frac{d}{d\xi}=\sqrt{ik}\frac{d}{d\xi_1};\quad \frac{d^2}{d\xi^2}=ik\frac{d^2}{d\xi_1^2},$$

代入方程(27)，得到方程

$$\frac{d^2X}{d\xi_1^2}+\left(\frac{\beta^2}{ik}-\xi_1^2\right)X=0。\tag{30}$$

若由下式決定常數 β^2：

$$\beta_n^2=(2n+1)ik,$$

其中 n 是正整數或零，則方程(30)變爲方程(28)。因此對新的變數 ξ_1 而言，可取函數 X 爲埃爾密脫函數:

$$X_n = C_n \psi_n(\xi_1) = C_n e^{-\frac{\xi_1^2}{2}} H_n(\xi_1),$$

或者，回到老的變數 ξ，得

$$X_n = C_n \psi_n(\sqrt{ik}\,\xi) = C_n e^{-\frac{ik\xi^2}{2}} H_n(\sqrt{ik}\,\xi),$$

其中 C_n 是任意常數。

用同樣的方法對付 (27) 的第二個方程。引進 $\eta_1 = i\sqrt{ik}\,\eta$ 以代 η，我們可以把這第二個方程也變成(28)的形式，並且參數 β_n 也是一樣的。回到老的變數，得

$$Y_n = D_n \psi_n(\eta_1) = D_n e^{\frac{ik\eta^2}{2}} H_n(i\sqrt{ik}\,\eta)。$$

這樣，我們就得到方程(25)的無限多個解，其形式如

$$U_n = A_n \psi_n(\sqrt{ik}\,\xi)\,\psi_n(i\sqrt{ik}\,\eta)。\qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{31}$$

這些解成一完全的函數系統，和圓柱坐標下的貝塞爾函數的情形相類似。和那裏一樣，我們也可以做出和漢開爾函數相當的函數來，並可藉此解決關於拋物柱面的繞射問題。

160. 勒蓋爾多項式 在[115]中我們求方程

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (s+1-x)\frac{dy}{dx} + \mu y = 0 \tag{32}$$

的解而得到廣義勒蓋爾多項式。

由[115]的(218)，(219)和(222)諸式可知若 μ 取數値 $\mu_n = n$，則方程(32)有 n 次多項式的解，這解恰爲勒蓋爾多項式，其表示式如下:

$$Q_n^{(s)}(x) = x^{-s} e^{x} \frac{d^n}{dx^n}(x^{s+n} e^{-x})。 \tag{33}$$

這樣，勒蓋爾多項式是方程

$$x\frac{d^2y_n}{dx^2} + (s+1-x)\frac{dy_n}{dx} + n y_n = 0 \tag{34}$$

的解，其中 s 常設爲大於 -1 的實數。

回憶 (32) 中的自變數 x 祗和向徑相差一個常數因子，由此可知這自變數的基本變動區間爲$(0, +\infty)$。勒蓋爾多項式與埃爾密脫多項式完全相類似，祗是他們的基本區間不是$(-\infty, +\infty)$而是$(0, +\infty)$。与埃爾密脫函數類似，[115]的(216)式定義了勒蓋爾函數:

(35) $$\omega_n^{(s)}(x)=e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{s}{2}}Q_n^{(s)}(x)=x^{-\frac{s}{2}}e^{\frac{x}{2}}\frac{d^n}{dx^n}(x^{s+n}e^{-x})。$$

由[115]的(213)和(222)式知道這些函數是方程

(36) $$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dw}{dx}\right]+\left(\lambda_n-\frac{x}{4}-\frac{s^2}{4x}\right)w=0$$

的解，其中

(37) $$\lambda_n=\frac{s+1}{2}+n。$$

如常，容易導出這些函數的正交性：

(38) $$\int_0^\infty \omega_m^{(s)}(x)\omega_n^{(s)}(x)dx=0, \qquad (m\neq n)$$

或由(35)有

(39) $$\int_0^\infty x^s e^{-x}Q_m^{(s)}(x)Q_n^{(s)}(x)dx=0。\qquad (m\neq n)$$

現在要計算當 $m=n$ 時積分(39)的數值。由勒蓋爾多項式的定義有

$$I_n=\int_0^\infty x^s e^{-x}[Q_n^{(s)}(x)]^2dx=\int_0^\infty Q_n^{(s)}(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^{s+n}e^{-x})dx。$$

施行分部積分，得

$$I_n=Q_n^{(s)}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{s+n}e^{-x})\Big|_{x=0}^{x=\infty}-\int_0^\infty\frac{dQ_n^{(s)}(x)}{dx}\frac{d^{n-1}(x^{s+n}e^{-x})}{dx^{n-1}}dx,$$

和埃爾密脫多項式的情形一樣，積分出來的項等於零。施行多次分部積分以後，可得

$$I_n=(-1)^n\int_0^\infty x^{s+n}e^{-x}\frac{d^nQ_n^{(s)}(x)}{dx^n}dx。$$

但 $\frac{d^nQ_n^{(s)}(x)}{dx^n}$ 是 $n!$ 與多項式 $Q_n^{(s)}(x)$ 中最高次項係數的乘積，應用萊伯尼茲公式於(33)式中的導數，易見這最高次項的係數等於$(-1)^n$，因此

$$I_n=n!\int_0^\infty x^{s+n}e^{-x}dx,$$

回憶函數 $\Gamma(z)$ 的定義，知

$$(40) \qquad I_n=\int_0^{\infty}x^s e^{-x}[Q_n^{(s)}(x)]^2 dx=n!\Gamma(s+n+1)。$$

和埃爾密脫多項式的情形一樣，也可以考察任意函數 $f(x)$ 在區間 $(0, +\infty)$ 中按照勒蓋爾多項式展開的級數。

現在要尋求勒蓋爾多項式的母函數。對(33)式中函數 $x^{s+n}e^{-x}$ 的 n 階導數應用勾犀公式，可得：

$$x^s e^{-x} Q_n^{(s)}(x)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{l_x}\frac{z^{s+n}e^{-z}}{(z-x)^{n+1}}dz,$$

其中 l_x 是環繞 $z=x$ 這點的小的閉線路。注意：函數 $z^{s+n}e^{-z}$ 爲全平面正則，但若 s 非整數，則以 $z=0$ 爲支點。引進另一積分變數 t 以代 z：

$$t=\frac{z-x}{z}, \quad z=\frac{x}{1-t}=\frac{xt}{1-t}+x,$$

代入積分之中，然後約去等式兩邊的 $x^s e^{-x}$，得

$$\frac{1}{n!}Q_n^{(s)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_0}e^{-\frac{xt}{1-t}}\frac{1}{(1-t)^{s+1}}\frac{dt}{t^{n+1}},$$

其中 l_0 是環繞 $t=0$ 的小的閉線路。

由此可知 $\frac{1}{n!}Q_n^{(s)}(x)$ 是函數

$$e^{-\frac{xt}{1-t}}\frac{1}{(1-t)^{s+1}}$$

按 t 的冪展開爲麥克勞臨級數時 t^n 的係數，即

$$(41) \qquad e^{-\frac{xt}{1-t}}\cdot\frac{1}{(1-t)^{s+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}Q_n^{(s)}(x)t^n。$$

由這公式容易導出勒蓋爾多項式所滿足的一些簡單的關係式。關於 x 微分(41)式的兩邊，得

$$-e^{-\frac{xt}{1-t}}\frac{t}{(1-t)^{s+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{dQ_n^{(s)}(x)}{dx}t^n$$

或
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}Q_n^{(s+1)}(x)t^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{dQ_n^{(s)}(x)}{dx}t^n,$$

比較 t^n 的係數，得：

(42) $$\frac{dQ_n^{(s)}(x)}{dx}=-nQ_{n-1}^{(s+1)}(x)。$$

完全類似的關於 t 微分(41)式的兩邊，可得關係式

(43) $$xQ_n^{(s)}(x)=(n+s)Q_n^{(s-1)}(x)-Q_{n+1}^{(s-1)}(x)。$$

最後，若以$(1-t)$乘(41)式的兩邊，則可得關係式

(44) $$Q_n^{(s-1)}(x)=Q_n^{(s)}(x)-nQ_{n-1}^{(s)}(x)。$$

人們有時常代替多項式 $Q_n^{(s)}(x)$ 而考察多項式$\frac{1}{n!}Q_n^{(s)}(x)$。

對(33)式應用若干次的羅爾定理，可以證明 $Q_n^{(s)}(x)$ 的所有的零點都是互不相同的實數，且位於區間$(0, +\infty)$的內部。

161 埃爾密脫多項式與勒蓋爾多項式間的關係 埃爾密脫多項式可以藉勒蓋爾多項式 $Q_n^{(s)}(x)$ 簡單地表示出來。當 $s=-\frac{1}{2}$ 時 $Q_n^{(s)}(x)$是方程

(45) $$x\frac{d^2y_n}{dx^2}+\left(\frac{1}{2}-x\right)\frac{dy_n}{dx}+ny_n=0$$

的解。藉公式 $x=\xi^2$ 引進新的變數 ξ 以代 x，由此

$$\frac{d}{dx}=\frac{1}{2\xi}\frac{d}{d\xi};\quad \frac{d^2}{dx^2}=\frac{1}{2\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2\xi}\frac{d}{d\xi}\right)=\frac{1}{4\xi^2}\frac{d^2}{d\xi^2}-\frac{1}{4\xi^3}\frac{d}{d\xi}。$$

代入方程(45)，得

(46) $$\frac{d^2y_n}{d\xi^2}-2\xi\frac{dy_n}{d\xi}+4ny_n=0,$$

這樣，(46)式就和方程(9)符合，如果在(9)式中改 n 為 $2n$ 的話。我們已經說過方程(9)的第二個解不會是多項式，因此可以肯定 $Q_n^{(-\frac{1}{2})}(\xi^2)$除一常數因子外與 $H_{2n}(\xi)$ 符合，即

$$H_{2n}(\xi)=C_nQ_n^{(-\frac{1}{2})}(\xi^2)。$$

要決定常數 C_n，可以比較上列等式兩邊最高次項的係數。如[156]中所知，等式左邊的最高次項係數為 2^{2n}，而由[160]知等式右邊的最高次項係數等於 $(-1)^nC_n$。因此 $C_n=$ $=(-1)^n2^{2n}$，故得

(47) $$H_{2n}(\xi)=(-1)^n2^{2n}Q_n^{(-\frac{1}{2})}(\xi^2)。$$

現在導出關於 $H_{2n+1}(\xi)$ 的類似的公式。函數 $Q_n^{(\frac{1}{2})}(x)$滿足方程：

$$x\frac{d^2y_n}{dx^2}+\left(\frac{3}{2}-x\right)\frac{dy_n}{dx}+ny_n=0,$$

再施行變換 $x=\xi^2$，即得：

$$\frac{d^2y_n}{d\xi^2}+\left(\frac{2}{\xi}-2\xi\right)\frac{dy_n}{d\xi}+4ny_n=0。$$

再由 $y_n=\frac{1}{\xi}z_n$ 引進另一未知函數 z_n 以代替 y_n。關於 ξ 微分這關係式，代入方程中，

得到 z_n 所滿足的方程：

$$\frac{d^2 z_n}{d\xi^2}-2\xi\frac{dz_n}{d\xi}+(4n+2)z_n=0\,。$$

這方程與(9)式符合，若改後者之中的 n 爲$(2n+1)$。由以上的演算立刻可得：

$$H_{2n+1}(\xi)=D_n\,\xi\,Q_n^{(\frac{1}{2})}(\xi^2)\,。$$

比較最高次項的係數，得 $D_n=(-1)^n\,2^{2n+1}$，由是

(48) $$H_{2n+1}(\xi)=(-1)^n\,2^{2n+1}\,\xi\,Q_n^{(\frac{1}{2})}(\xi^2)\,。$$

162．埃爾密脫多項式的漸近表示　埃爾密脫函數

(49) $$\psi_n(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}H_n(x)=(-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

滿足方程(11)：

(50) $$\psi_n''(x)+(2n+1-x^2)\psi_n(x)=0\,。$$

考察足號爲偶數的情形。這時有

(51) $$\psi_{2n}''(x)+(4n+1-x^2)\psi_{2n}(x)=0\,。$$

此外，由(24)式以及 $H_{2n}(x)$ 是 x^2 的多項式的事實可得如下的初始條件：

(52) $$\psi_{2n}(0)=(-1)^n\,2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\,;\quad \psi_{2n}'(0)=0$$

當 n 甚大時可藉方程(51)與初始條件(52)得到埃爾密脫多項式的漸近表示。首先，回憶方程

(53) $$y''+k^2y=f(x)$$

的解在 $x=0$ 滿足初始條件 $y(0)=y'(0)=0$ 者其形式如[II, 28]

(54) $$y=\frac{1}{k}\int_0^x f(u)\sin k(x-u)\,du\,。$$

若以下列初始條件代替剛才的零初始條件：

(55) $$y(0)=a\,;\quad y'(0)=b\,,$$

則應於解(54)之後再加一個滿足初始條件(55)的齊次方程的解，然後始可得到滿足初始條件(55)的方程(53)的解，其形式如下：

(56) $$y=a\cos kx+\frac{b}{k}\sin kx+\frac{1}{k}\int_0^x f(u)\sin k(x-u)\,du\,。$$

回到方程(51)，將他改寫爲：

$$\psi_{2n}''(x)+(4n+1)\psi_{2n}(x)=x^2\,\psi_{2n}(x)\,。$$

現在 $k^2=4n+1$，$f(x)=x^2\psi_{2n}(x)$，故由(56)式得：

(57) $$\psi_{2n}(x)=\psi_{2n}(0)\cos\sqrt{4n+1}\,x+\frac{1}{\sqrt{4n+1}}\int_0^x u^2\,\psi_{2n}(u)\sin\sqrt{4n+1}\,(x-u)\,du\,。$$

可以證明當 n 甚大時上式右邊第一項是函數 $\psi_{2n}(x)$ 的主要部分。爲此，可設 $x>0$ 而估計等式右邊的積分。應用布尼可夫斯基不等式及(17)式的結果，可得：

$$\left|\int_0^x u^2\psi_{2n}(u)\sin\sqrt{4n+1}(x-u)du\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\int_0^x\psi_{2n}^2(u)\,du}\;\sqrt{\int_0^x u^4\sin^2\sqrt{4n+1}\,(x-u)du}<$$

$$<\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{2n}^2(u)du}\;\sqrt{\int_0^x u^4du}=\sqrt{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}\,\frac{x^5}{5}}$$

代入(57)式，得

$$\psi_{2n}(x)=\psi_{2n}(0)\cos\sqrt{4n+1}\,x+\frac{2^n\sqrt{(2n)!}\;\sqrt[4]{\pi}\,x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}\;\sqrt{4n+1}}\theta_n(x),$$

其中 $\theta_n(x)$ 是 x 的函數，滿足條件

$$-1<\theta_n(x)<+1\,。$$

將 $\psi_{2n}(0)$ 括出，記住他的表示式 (52)，即得：

$$\psi_{2n}(x)=\psi_{2n}(0)\left[\cos\sqrt{4n+1}\,x+\frac{(-1)^n\sqrt{(2n)!}\;\sqrt[4]{\pi}\,x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}\;\sqrt{4n+1}\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)}\theta_n(x)\right]。\tag{58}$$

考察這式中 $\theta_n(x)$ 前面的因子：

$$\frac{\sqrt[4]{\pi}\,x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdots2n}}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}=\frac{\sqrt[4]{\pi}\,x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}}\,。$$

若記

$$I_\lambda=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\lambda x\,dx,$$

則如 [I, 100] 中所知

$$I_{2n}=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots1}{2n(2n-2)\cdots2}\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n+1}=\frac{2n(2n-2)\cdots2}{(2n+1)(2n-1)\cdots3},$$

但是顯然知道 $I_{2n+1}<I_{2n}$，即

$$\frac{2n(2n-2)\cdots2}{(2n+1)(2n-1)\cdots3}<\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots1}{2n(2n-2)\cdots2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

或

$$\left(\frac{2n(2n-2)\cdots2}{(2n-1)(2n-3)\cdots1}\right)^2<(2n+1)\frac{\pi}{2}\,。$$

從而

$$\sqrt{\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}}<\frac{\sqrt[4]{\pi}}{\sqrt[4]{2}}\sqrt[4]{2n+1}\,。$$

因此知道 $\theta_n(x)$ 的係數爲

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{50}}\sqrt{\frac{2n+1}{4n+1}}\,x^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{4n+1}}\theta_n',$$

其中 $0<\theta_n'<1$　丢去小於 1 的因子，可將上式寫成

$$x^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{4n+1}}\theta_n'',$$

其中 $0<\theta_n''<1$。代入(58)式，即得足號爲偶數的埃爾密脫函數的漸近表示：

$$\psi_{2n}(x)=\psi_{2n}(0)\left[\cos\sqrt{4n+1}\,x+x^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{4n+1}}\theta_n''(x)\right],$$

其中 $-1<\theta_n''(x)<+1$。因此，對於已定的 x 當 n 無限增加時方括弧中的第二項極限爲零。易知 $x>0$ 的限制顯然是不必要的。添加因子 $e^{\frac{1}{2}x^2}$，可得足號爲偶數的埃爾米特多項式的漸近表示：

$$H_{2n}(x)=(-1)^n2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots(2n-1)e^{\frac{1}{2}x^2}\left[\cos\sqrt{4n+1}\,x+O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\right]。$$

當足號爲奇數時同樣可得

$$H_{2n+1}(x)=(-1)^n2^{n+\frac{1}{2}}\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\sqrt{2n+1}\,e^{\frac{1}{2}x^2}\left[\sin\sqrt{4n+3}\,x+O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\right],$$

在這式子中 $O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$ 表示一個數量，當 n 無限增加時 $\sqrt[4]{n}\,O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$ 爲有限，祇要 x 限制在他的變動範圍的任何有限區間之中。注意：在三角函數的符號之下我們可以取任意的 $\sqrt{4n+\alpha}\,x$ 爲自變數，其中 α 是已給的實數。實際上，我們有

$$\cos\sqrt{4n+1}\,x-\cos\sqrt{4n+\alpha}\,x=$$

$$=2\sin\frac{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n+\alpha}}{2}x\sin\frac{\sqrt{4n+\alpha}-\sqrt{4n+1}}{2}x=$$

$$=2\sin\frac{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n+\alpha}}{2}x\sin\frac{\alpha-1}{2(\sqrt{4n+\alpha}+\sqrt{4n+1})}x。$$

若限制 x 於有限區間之內，則等式右邊的乘積顯然爲 $O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$，因此我們可以用 $\cos\sqrt{4n+\alpha}\,x$ 代替 $\cos\sqrt{4n+1}\,x$。對正弦函數的情形也是一樣。利用以上的計算，我們還可以把剩餘項 $O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$ 更加估計得精確一些。

163. 勒上特多項式的漸近表示 用完全類似的方法可以導出當 n 甚大時勒上特多項式的漸近表示。這多項式滿足微分方程：

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0。$$

藉 $x=\cos t$ 引進變數 t 以代 x，又以函數

$$v_n(t)=\sqrt{\sin t}\;P_n(\cos t)\ \text{或}\ P_n(\cos t)=\frac{v_n(t)}{\sqrt{\sin t}} \tag{59}$$

代替 $P_n(x)$，代入前方程，卽得 $v_n(t)$ 所滿足的方程：

$$v_n''(t)+\left[n(n+1)+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos^2t}{\sin^2t}\right]v_n(t)=0,$$

或可改寫爲：

$$v_n''(t)+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2v_n(t)=-\frac{1}{4\sin^2t}v_n(t)。$$

x 所在的區間 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 對應於 $0\leqslant t\leqslant\pi$。今取 $t=\frac{\pi}{2}$ 爲始值，他對應於 $x=0$。考察

足號爲偶數的情形：

$$v''_{2n}(t)+\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2 v_{2n}(t)=-\frac{1}{4\sin^2 t}v_{2n}(t)。\tag{60}$$

回憶(59)式及

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n},\quad P'_{2n}(0)=0$$

的事實，即得 $v_{2n}(t)$ 所應滿足的初始條件：

$$v_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n};\quad v'_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0。\tag{61}$$

若丟棄方程(60)中等號右邊的項，則所得齊次方程的一般積分爲：

$$C_1\cos\left(2n+\frac{1}{2}\right)t+C_2\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)t。\tag{62}$$

如此選取 C_1 和 C_2，使上式滿足條件(61)：

$$C_1\cos\left(2n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}+C_2\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=v_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-C_1\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}+C_2\cos\left(2n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=0,$$

或由公式 $\cos(n\pi+\varphi)=(-1)^n\cos\varphi$ 和 $\sin(n\pi+\varphi)=(-1)^n\sin\varphi$ 可改寫爲：

$$C_1\cos\frac{\pi}{4}+C_2\sin\frac{\pi}{4}=(-1)^n v_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right);\quad -C_1\sin\frac{\pi}{4}+C_2\cos\frac{\pi}{4}=0,$$

從而 $$C_1=C_2=\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}v_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n v_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{4},$$

代入(62)式，得 $$(-1)^n v_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]。$$

因此知道在初始條件(61)之下方程(60)的解是：

$$v_{2n}(t)=(-1)^n v_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]-\tag{63}$$

$$-\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\frac{1}{4\sin^2 u}v_{2n}(u)\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)(t-u)du,$$

其中假設 $0\leqslant x<1$ 及 $0<t\leqslant\frac{\pi}{2}$。注意，這裏我們用到如下的事實：在初始條件 $y(a)=y'(a)=0$ 之下方程(53)的解仍爲(54)，但積分的下限應改爲 a。[II, 23]。

考察(63)式右邊的積分，利用(59)式可得：

$$K_{2n}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\frac{1}{4\sin^2 u}\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)(t-u)\,P_{2n}(\cos u)\sqrt{\sin u}\,du。$$

由此應用布涅可夫斯基不等式：

$$K_{2n}^2\leqslant\int_t^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\left(2n+\frac{1}{2}\right)(t-u)}{16\sin^4 u}du\int_t^{\frac{\pi}{2}}P_{2n}^2(\cos u)\sin u\,du。$$

右邊第一個積分小於 $\int_t^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{16\sin^4 u}=\beta(t)$,

其中 $\beta(t)$ 當 t 已給時有一定的有限數值，且當 $0<\varepsilon_1<t\leqslant\frac{\pi}{2}$ 時 $\beta(t)$ 爲有界，這裏 ε_1 是已給的正數。第二個積分小於

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}P_{2n}^2(\cos u)\sin u\,du=\int_0^1 P_{2n}^2(x)\,dx=\frac{1}{4n+1}。$$

這樣，我們就得到如下的估計：

$$|K_{2n}|<\frac{\alpha(x)}{\sqrt{4n+1}},$$

其中 $\alpha(x)$ 與 n 無關，且當 $0\leqslant x<1-\varepsilon$ 時爲有界，ε 是任意已給正數。代入(63)式得：

$$v_{2n}(t)=(-1)^n v_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]+\frac{\gamma(x)}{(4n+1)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 $\gamma(x)$ 當 $0\leqslant x<1-\varepsilon$ 且 n 無限增大時爲有界。應用(61)式的結果，得：

$$v_{2n}(t)=\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}\left\{\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]+\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{2\cdot4\cdots2n}{1\cdot3\cdots(2n-1)(4n+1)^{\frac{3}{2}}}\gamma(x)\right\}。$$

利用上一段中證明過的不等式：

$$\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}<\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\sqrt{2n+1},$$

可得 $$v_{2n}(t)=\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}\left\{\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]+\sqrt{\frac{2n+1}{4n+1}}\,\frac{\delta(x)}{4n+1}\right\},$$

或 $$v_{2n}(t)=\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}\left\{\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]+\frac{\eta(x)}{4n+1}\right\},$$

其中 $\delta(x)$ 和 $\eta(x)$ 是 x 的函數，當 $0\leqslant x<1-\varepsilon$ 且 n 無限增大時爲有界。以上列計算爲基礎我們還可以給這兩函數以比較更精確的估計。

最後，由(59)式可得：

$$P_{2n}(\cos t)=\frac{1}{\sqrt{\sin t}}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}\left\{\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}。\tag{64}$$

完全類似的，當足號爲奇數時有：

$$P_{2n+1}(\cos t)=\frac{1}{\sqrt{\sin t}}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}\left\{\cos\left[\left(2n+\frac{3}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}。\tag{65}$$

以上的結果對於負數值 $x=\cos t$ 也能成立。其中 $O\left(\frac{1}{n}\right)$ 代表一個數量，使當 x 位於區間 $-1+\varepsilon<x<1-\varepsilon$ 之內而 n 又和 x 無關地無限增大時，乘積 $nO\left(\frac{1}{n}\right)$ 仍爲有界。這裏 ε 是個任意小的固定正數。

我們可以把上列式子寫成更簡單的形式。爲此，利用華力斯公式[75]

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2n-2)^2\cdot 2n}{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}。$$

由此可得：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\sqrt{2n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

或
$$\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\sqrt{2n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\eta_n,$$

其中 $\eta_n\to 0$ 當 $n\to\infty$。上式即：
$$\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}=\sqrt{\frac{1}{n\pi}}+\frac{\eta_n}{\sqrt{2n}}。$$

藉此可以改寫(64)式爲：
$$P_{2n}(\cos t)=\sqrt{\frac{1}{n\pi\sin t}}\left\{\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]+\eta_{2n}''\right\}。$$

對於(65)式亦有類似的改變。易見對任何足號常成立

(66) $$P_n(\cos t)=\sqrt{\frac{1}{n\pi\sin t}}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]+\eta_n''\right\},$$

其中 $\eta_n''\to 0$ 一致地關於 $\varepsilon<t<\pi-\varepsilon$ 中的 t，當 $n\to\infty$，$\varepsilon>0$。

再寫一個勒蓋爾多項式的漸近表示，證明從略。設 x 在區間 $0<a\leqslant x\leqslant b$ 中變動，a 和 b 是任何有限數，則成立下面的漸近公式：

(67) $$Q_n^{(s)}(x)=\pi^{-\frac{1}{2}}n^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}\cdot n!\,x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}e^{\frac{x}{2}}\left\{\cos\left(2\sqrt{nx}-\frac{s\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}。$$

IV　橢圓積分和橢圓函數

164．化橢圓積分爲歸範形式　從本節開始我們要研究某種複變數函數，他們和線性微分方程沒有什麽關係，但卻有另外的來源，就是這些函數和一些不能表示爲有限形式的積分，即所謂橢圓積分有密切的關係。我們從前早已提到過這種積分[I, 199]，現在要開始來研究他們了。

以前我們研究過形式如

(1) $$\int R(x,\sqrt{P(x)})dx$$

的積分，其中 $R(x,y)$ 是 x 和 y 的有理函數，$P(x)$ 是 x 的二次式。我們知道，這種積分可以用初等函數來表示。如果 $P(x)$ 是三次或四次多項式的話，積分(1)就叫做橢圓積分。一般，他不能表示爲有限形式。

但在例外的情形他仍可以用初等函數來表示。例如，若取積分

$$\int\frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{x^4+bx^2+c}},$$

其中 n 是整數。引進新的變數 $t=x^2$，可將他化成如下形式的積分

$$\frac{1}{2}\int\frac{t^n\,dt}{\sqrt{t^2+bt+c}},$$

我們知道這樣的積分是可以用初等函數表示出來的。若 $P(x)$ 爲三次或四次多項式，而積分（1）可以用初等函數來表示，那末他有時就叫做假橢圓積分。

現在回頭來研究橢圓積分。首先要注意：$P(x)$ 是三次多項式的情形和 $P(x)$ 是四次多項式的情形沒有根本上的差別。一種情形可以藉助於積分變數的簡單變換化爲另一種情形去。實際上，設 $P(x)$ 爲四次多項式

（2） $$P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,$$

又設 $x=x_1$ 是這多項式的一個零點。由

（3） $$x=x_1+\frac{1}{t}$$

引進另一變數 t 以代 x。代入（2）式，得

$$P(x)=a\left(x_1+\frac{1}{t}\right)^4+b\left(x_1+\frac{1}{t}\right)^3+c\left(x_1+\frac{1}{t}\right)^2+d\left(x_1+\frac{1}{t}\right)+e。$$

解開括弧並利用 $x=x_1$ 是多項式（2）的零點的事實，得

$$P(x)=\frac{P_1(t)}{t^4},$$

其中 $P_1(t)$ 是 t 的三次多項式。這樣，我們可以把四次多項式的情形化爲三次多項式的情形。注意：變換（3）實際上是把多項式（2）的一個零點 $x=x_1$ 變爲 $t=\infty$。

反過來，設 $P(x)$ 爲三次多項式，則由分式線性變換

$$x=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}$$

可得 $$P(x)=\frac{P_3(t)}{(\gamma t+\delta)^4},$$

其中 $P_2(t)$，一般而論，是個四次多項式。

用和[I，199]中完全一樣的論證可以證明橢圓積分（1）最後必可化爲形式如

$$\int\frac{\varphi(x)}{\sqrt{P(x)}}dx \tag{4}$$

和

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k\sqrt{P(x)}} \tag{5}$$

的積分，其中 $\varphi(x)$ 是個多項式。首先假設 $P(x)$ 是三次多項式，現在證明上列形式的積分可以化成三種標準形式。爲此，考察積分

$$I_k=\int\frac{x^k}{\sqrt{P(x)}}dx, \tag{6}$$

其中 k 是個整數，正的或負的。置

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d。$$

施行微分，得

$$(x^m\sqrt{P(x)})'=mx^{m-1}\sqrt{P(x)}+x^m\frac{3ax^2+2bx+c}{2\sqrt{P(x)}}=$$

$$=\frac{mx^{m-1}(ax^3+bx^2+cx+d)}{\sqrt{P(x)}}+\frac{x^m(3ax^2+2bx+c)}{2\sqrt{P(x)}},$$

由此積分，利用（6）式的記號，得

$$x^m\sqrt{P(x)}+C=maI_{m+2}+mbI_{m+1}+mcI_m+mdI_{m-1}+$$

$$+\frac{3a}{2}I_{m+2}+bI_{m+1}+\frac{c}{2}I_m$$

或

$$a\left(m+\frac{3}{2}\right)I_{m+2}+b(m+1)I_{m+1}+c\left(m+\frac{1}{2}\right)I_m+dmI_{m-1}=$$

$$=x^m\sqrt{P(x)}+C, \tag{7}$$

其中 C 是任意常數。

當 $m=0$ 和 $m=1$ 時有

$$\frac{3}{2}aI_2+bI_1+\frac{c}{2}I_0=\sqrt{P(x)}+C$$

$$\frac{5}{2}aI_3+2bI_2+\frac{3}{2}cI_1+dI_0=x\sqrt{P(x)}+C。$$

藉此二式可以用 I_0 和 I_1 來表示 I_2 和 I_3。在(7)式中置 $m=2$,有

$$\frac{7}{2}aI_4+3bI_3+\frac{5}{2}cI_2+2dI_1=x^2\sqrt{P(x)}+C,$$

由此又可決定 I_4,其餘依次類推。因此,對於正整數 k 所有形式如(6)的積分都可以用 I_0 和 I_1 來表示。顯然,積分(4)也具有這個性質。

現在回到積分(5)。以 $t=x-a$ 代替 x,可以化(5)爲

(8) $$I'_k=\int\frac{t^k}{\sqrt{P_1(t)}}dt, \qquad (k=-1,\ -2,\ \cdots)$$

其中 $P_1(t)$ 是三次多項式,k 是負整數。於(7)式中置 $m=-1$,得

$$\frac{1}{2}a'I'_1-\frac{1}{2}c'I'_{-1}-d'I'_{-2}=t^{-1}\sqrt{P_1(t)}+C,$$

其中 a', b', c' 和 d' 是 $P_1(t)$ 中的係數。

其次,置 $m=-2$,得

$$-\frac{1}{2}a'I'_0-b'I'_{-1}-\frac{3}{2}c'I'_{-2}-2d'I'_{-3}=t^{-2}\sqrt{P_1(t)}+C$$

其餘類推。由此立刻可見所有形式如(8)的積分都可以用 I'_1, I'_0 和 I'_{-1} 來表示,卽可以用

$$\int\frac{x-a}{\sqrt{P(x)}}dx;\quad \int\frac{dx}{\sqrt{P(x)}};\quad \int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}$$

來表示。

因此我們可以肯定:若 $P(x)$ 爲三次多項式,則所有的橢圓積分都可以化成下列三種形式的積分:

(9) $$\int\frac{dx}{\sqrt{P(x)}};\quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{P(x)}};\quad \int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}。$$

他們依次稱爲第一類，第二類和第三類的橢圓積分。

注意：縱令我們從實的積分出發，上述演算仍可給我們帶來複數。例如，若多項式 $P(x)$ 的四個零點都是複數，則(3)式中的 x_1 就是複數了。同樣，由於化有理分式爲最簡分式而將積分化成(5)的形式時其中的 a 也可能是複數。我們不擬詳細說明應該如何演算才可以避免複數出現。以後我們要部分地考慮這問題。

165. 化橢圓積分爲勒上特形式 現在我們祇研究第一類和第二類橢圓積分，並且要證明他們可以化成新的形式，其中被積分函數祇包含三角函數。先看第一類積分。顯然可設 $P(x)$ 中最高次項的係數等於±1。

$$P(x)=\pm x^3+bx^2+cx+d\text{。}$$

首先假設這具實係數的多項式有三個實零點 α, β 和 γ。我們當然應該假設這些根是互不相同。否則的話，多項式 $P(x)$ 必包含一平方因子 $(x-\alpha)^2$，他可以拿到根號外去，這樣，在根號裏面就祇剩下一次多項式了。如果 x^3 的符號是正的，則設 α 爲最小零點，如果 x^3 的符號是負的，則設 α 爲最大零點。又設 β 是中間零點。由下式引進變數 φ 以代 x：

$$x=\alpha+(\beta-\alpha)\sin^2\varphi\text{。}\tag{10}$$

將這變換代入多項式

$$P(x)=\pm x^3+bx^2+cx+d=\pm(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

經過簡單的計算，得

$$P(x)=|\gamma-\alpha\ (\beta-\alpha)^2(1-k^2\sin^2\varphi)\sin^2\varphi\cos^2\varphi,$$

其中

$$k^2=\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha},\tag{11}$$

由我們選取零點的方法可知 k^2 常在0和1之間，我們常設 $k>0$。又由(10)有

$$dx=2(\beta-\alpha)\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi,$$

由此可知

(12) $$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

和

(13) $$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

祇差一個常數因子。

現在證明：如果具實係數的多項式 $P(x)$ 祇有一個實零點 $x=\alpha$，則我們可以得到與上面一樣的結果。這時可寫

$$P(x)=\pm(x-\alpha)(x^2+px+q),$$

其中具實係數的三項式 (x^2+px+q) 沒有實零點，因此對於 x 的實數值這三項式常爲正。由下式引進變數 φ 以代 x：

(14) $$x=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}\,\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}。$$

代入前式，得

$$\pm(x-\alpha)(x^2+px+q)=(\alpha^2+p\alpha+q)^{\frac{3}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^4\frac{\varphi}{2}},$$

其中

(15) $$k^2=\frac{1}{2}\left(1\mp\frac{\alpha+\frac{p}{2}}{\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}}\right)。$$

現在證明 k^2 是在 0 和 1 之間。爲此祇需證上式括弧中第二項的絕對值小於 1，即證明分母的平方大於分子的平方。我們顯有

$$\alpha^2+p\alpha+q=\left(\alpha+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{1}{4}p^2\right)。$$

上式右邊第二項當然是正的，因由假設，三項式 x^2+px+q 祇有虛零點的緣故。因此得證

$$x^2+px+q>\left(x+\frac{p}{2}\right)^2。$$

其次，由(14)式有

$$dx=\pm\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}\ \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi,$$

所以現在的情形下(12)式經過變換以後也祇和(13)式相差一個常數因子。

因此我們看到任何實的第一類積分常可藉助於實變換化成如下形式的積分：

$$(16)\qquad \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}。\qquad (0<k^2<1)$$

現在再看第二類積分

$$\int\frac{x}{\sqrt{P(x)}}dx。$$

利用前面用過的變換之一可以把這積分化成積分(16)以及下列兩種積分中的一種：

$$(17)\qquad \int\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi \text{ 和 } \int\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi。$$

以常數因子 k^2 乘第一個積分，可以把他寫成

$$k^2\int\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

這樣，他就可化成形式如(16)的積分以及如下形式的積分：

$$(18)\qquad \int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi。$$

現在證明(17)中的第二個積分可以化成第一個積分。爲此，可以利用下面的公式，其證明極易：

$$2d\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\right)=\left[\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)-2k^2\sin^2\varphi\right]\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}。$$

將這等式兩邊積分，即得所需的結果：

$$\int\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi=2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+$$

$$+2k^2\int\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi-\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}。$$

由此得見第一類和第二類的橢圓積分常可化成如下兩種形式的積分：

$$(19)\qquad \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};\quad \int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi。$$

這些積分有時稱爲第一類和第二類橢圓積分的勒上特形式。

若以另一變數 $t=\sin\varphi$ 代替 φ，則可將(19)的兩積分改寫成別的形式。

這時
$$d\varphi=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

因此(19)的第一個積分變成：

$$\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}。$$

這裏根號以內的四次多項式具有特殊的形式。如果利用自變數的一般分式線性變換

$$x=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}$$

的話，我們也可以從一般形式的橢圓積分轉化而得上面的特殊形式的積分。

命(19)中積分的下限爲零，上限爲變數 φ，其結果可以用特別的記號來表示：

$$(20)\quad F(k,\varphi)=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};\quad E(k,\varphi)=\int_0^\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi。$$

若上限取 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，則兩積分祇是 k 的函數，記爲：

$$(21)\qquad F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};\quad E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

通常稱爲第一類和第二類的全橢圓積分。

(20)式和(21)式中諸積分的數值都有表可查。最早問世的是公元1826年出版的勒上特所做的表。在這些表之中還有 $F(k)$ 和 $E(k)$ 的對數數值的表，當 k 取各種不同的數值時；這時我們置 $k=\sin\theta$，而 θ 以十分之一度爲單位。至於(20)中兩積分的表則有兩個數值 k 和 φ 同時在變動。這時也置 $k=\sin\theta$，而 φ 和 θ 分別取 0° 到 90° 間的所有整數度數。積分的數値取九位十進小數。在 E. 蔣克和 F. 愛姆特的書"有公式和曲線的函數表"一書中也有許多橢圓積分的表。

166. 例題 1. 長度爲 l，振幅爲 2α 的單擺的完全振動所需的時間是：

$$(22)\qquad T=\sqrt{\frac{2l}{g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\tau}{\sqrt{\cos\tau-\cos\alpha}},$$

其中 g 是重力加速度。不難將積分(22)表示爲第一類的全橢圓積分。爲此，引進常數 $k=\sin\frac{\alpha}{2}$，並藉 $\sin\frac{\tau}{2}=k\sin\varphi$ 引進新的變數 φ 以代 τ。我們有

$$\cos\tau-\cos\alpha=2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\tau}{2}\right)=2k^2\cos^2\varphi$$

又

$$\cos\frac{\tau}{2}d\tau=2k\cos\varphi\,d\varphi \text{ 或 } d\tau=\frac{2k\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

最後，由 $\sin\frac{\tau}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$ 可知 φ 應從 0 變到 $\frac{\pi}{2}$，故得：

$$T=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=2\sqrt{\frac{l}{g}}F(k)。$$

2. 考察橢圓積分：

$$\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

其中 $k^2>1$，又設上限 φ_0 是在區間 $(0,\alpha)$ 中，α 係由方程 $\sin\alpha=\frac{1}{k}$ 所決定。由 $\sin\psi=k\sin\varphi$ 引進另一變數 ψ 以代 φ，ψ 應在區間 $(0,\psi_0)$ 中變動，其中 $\sin\psi_0=k\sin\varphi_0$。於是這積分就變成

$$\int_0^{\psi_0}\frac{1}{k}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}\sin^2\psi}}。$$

從而

$$\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{k}F\left(\frac{1}{k},\psi_0\right)。$$

若上限 $\varphi_0=\alpha$，則 $\psi_0=\frac{\pi}{2}$，由(21)得

$$\int_0^{\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{k}F\left(\frac{1}{k}\right)。$$

完全一樣的辦法可以用來研究當 $k^2>1$ 時積分

$$\int_0^{\varphi_0}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

的數值。特別，當 $\varphi_0=\alpha$ 時有

$$\int_0^{\alpha}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{1}{k}F\left(\frac{1}{k}\right)+kE\left(\frac{1}{k}\right)-kF\left(\frac{1}{k}\right)。$$

3．考察積分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}。$$

設 $x=\cos\varphi$ 卽可將他化爲標準形式

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}。$$

用同一變換可得

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}-\sqrt{2}\int\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,d\varphi。$$

4．對於積分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

可以應用[165]中講過的方法處理，卽由

$$x=-1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}$$

引進變數 φ 以代 x，可得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin^2\varphi}}。$$

5．將積分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}\tag{23}$$

化爲最簡形式的步驟較爲複雜。這時根號內的多項式可以分解爲兩個實的二次因子：

$$x^4+1=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)。$$

一般，如果根號內的四次式的零點全部爲複數或虛數，並且他可以分解爲兩個實因子

$$P(x)=(x^2+px+q)(x^2+p'x+q'),$$

則應由下二式決定 λ 和 μ：

$$(p-p')\lambda=q-q'-\sqrt{(q-q')^2+(p-p')(pq'-qp')}$$

$$(p-p')\mu=q-q'+\sqrt{(q-q')^2+(p-p')(pq'-qp')}$$

然後施行變換
$$x=\frac{\lambda+\mu m\operatorname{tg}\varphi}{1+m\operatorname{tg}\varphi},$$

其中 m 是二數
$$\sqrt{\frac{\lambda^2-p\lambda+q}{\mu^2-p\mu+q}} \text{ 和 } \sqrt{\frac{\lambda^2-p'\lambda+q'}{\mu^2-p'\mu+q'}}$$

中較小的一數。

在我們的情形這變換有如下的形式
$$x=\frac{\operatorname{tg}\varphi-(1+\sqrt{2})}{\operatorname{tg}\varphi+(1+\sqrt{2})},$$

經過這變換以後,積分(23)變爲
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}=\int\frac{(2+\sqrt{2})}{\sqrt{\sin^4\varphi+6(3+2\sqrt{2})\sin^2\varphi\cos^2\varphi+(3+2\sqrt{2})^2\cos^4\varphi}}d\varphi\text{。}$$

易見等式右邊根號內的式子是
$$\sin^2\varphi+(3+2\sqrt{2})^2\cos^2\varphi=(3+2\sqrt{2})^2\left(1-\frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\sin^2\varphi\right)$$

和 $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi$ 的乘積。這樣,我們就得到積分(23)的歸結形式
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}=\int\frac{(2-\sqrt{2})d\varphi}{\sqrt{1-\frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\sin^2\varphi}}\text{。}$$

167. 橢圓積分的反演 研究過橢圓積分以後,我們現在再來解釋橢圓函數的意義。在某些方面橢圓函數和三角函數相類似,並且是他的推廣。首先,說明一件事實,就是三角函數,例如 $x=\sin u$,可以藉助於所謂積分的反演而得到。考察一個初等的積分

$$u=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\text{。}\tag{24}$$

積分的值 u 是上限 x 的函數。現在要看他的反函數,卽將上限 x 視爲積分的值 u 的函數。這樣,我們就得到單值正則的週期函數 $x=\sin u$。我們說,這函數是由積分(24)反演而得到的。同樣,若取第一類的橢圓積分
$$u=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{P(x)}},$$

那末將他反演的結果就得到一個解析單値函數 $x=f(u)$。這函數不是整函數而是分函數,並且他不是祇有一個,而是有兩個基本上不相同的

週期。這問題我們以後還要詳細說明。現在祇考察第一類橢圓積分的勒上特形式

$$(25)\qquad u=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}},$$

假設其中的 k 是實數，並且滿足不等式 $0<k<1$。

在研究將上半 z 平面保角變換爲 u 平面中的長方形的問題時我們已經遇見過積分(25)，[37]。現在再回憶其中的重要結果，但記號可能有些更動。(25)式將上半 z 平面保角變換爲 u 平面中的長方形 $ABCD$。他的一邊 AB 在實軸上，頂點 A 和 B 的坐標爲

$$(26)\qquad \pm K=\pm\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

又邊長

$$(27)\qquad AB=2\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=2K。$$

另一邊 BC 的長度爲

$$BC=\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}。$$

若在這式子中藉 $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-k'^2x^2}}$ 引進新的積分變數 x 以代 z，其中 $k'^2=1-k^2$，那末經過變換以後，像對於 AB 一樣，我們也可以用一個第一類全橢圓積分來表示 BC 的長：

$$(28)\qquad BC=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}=K',$$

其中 k' 由下式決定

$$(29)\qquad k^2+k'^2=1。$$

k 通常稱爲積分(25)的模數，而 k' 稱爲補模數，二者之間存在關係(29)。

現在要做函數(25)的解析延拓了。假如由上半平面到下半平面的解析延拓是經過實軸上的線段$\left(1,\dfrac{1}{k}\right)$而作的，那末所得到的函數也將

下半平面保角變換爲一個長方形，這長方形可由 $ABCD$ 關於邊 BC 反射而得，BC 就是上述實軸上的線段$\left(1, \frac{1}{k}\right)$的像。同樣，以後每一由一個半平面到另一半平面的解析延拓所決定的函數 u 的數值充滿了 u 平面中的一個長方形，這長方形可由前一長方形關於他的一邊反射而得，這一邊就是我們做解析延拓時通過的實軸上某線段的像。這樣，函數(25)在 z 平面上所有可能的解析延拓就決定 u 平面上無數個同樣的長方形所成的網，他們充滿了整個 u 平面，任何兩個不相重疊。這網如 78 圖所示，其中空白的長方形和上半 z 平面對應，有斜線的長方形和下半 z 平面對應。反之，假設 $z=f(u)$ 是(25)的反演，沿一曲線 l 作這函數的解析延拓時，我們祇要注意 l 曾和長方形的那些邊相交，就可得到 z 平面上由一個半平面經過對應的實軸上的線段而達另一半平面的一段段的路線。例如，若在 u 平面中環繞長方形網的任一頂點一週，則在 z 平面上得到的 z 的終值和始值相同。因此知道函數 $f(u)$ 是整個 u 平面上的單值解析函數。

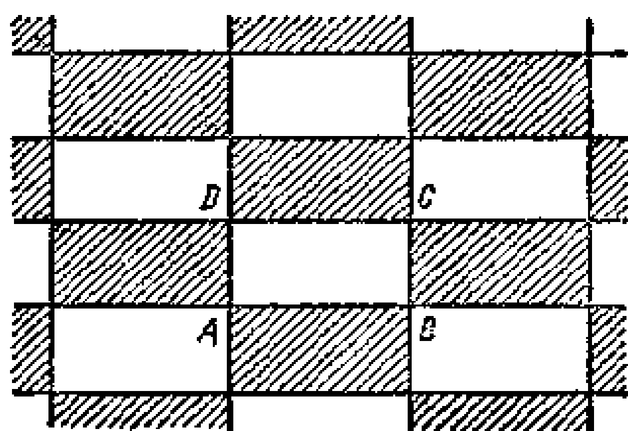


圖 78

基本長方形 $ABCD$ 的邊 CD 的中點 $u=iK'$ 和 $z=\infty$ 對應[37]，並且 $u=iK'$ 的單葉鄰域變爲 $z=\infty$ 的單葉鄰域，由此可知[23]，函數 $f(u)$ 以 iK' 這點爲單極點。同樣，每一長方形中和 iK' 相當的點都是 $f(u)$ 的單極點，因此 $f(u)$ 是分函數。

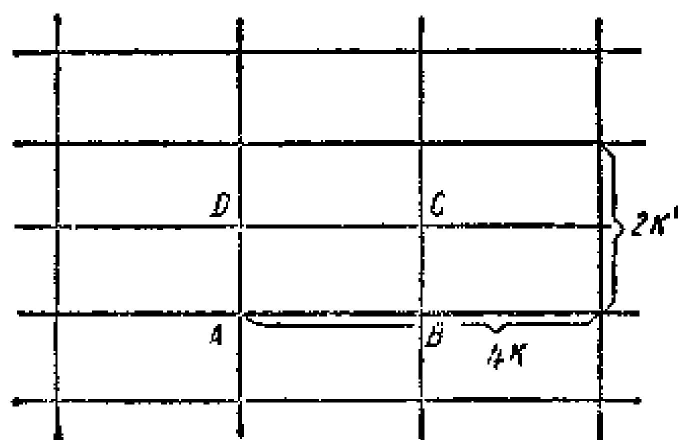


圖 79

最後，我們要證明 $f(u)$ 有實的週期 $4K$ 和純虛數的週期

$i2K'$。將圖 78 的長方形網中每四個有共同頂點的長方形合爲一個大的長方形。這樣就得到一個大長方形所成的網，如圖 79 所示。每一大長方形中平行於實軸的邊長爲 $4K$，平行於虛軸的邊長爲 $2K'$。

從 u 跑到 $u+4K$ 或是從 u 到 $u+i2K'$ 在幾何圖形上就是從一個大長方形中的一點跑到鄰接大長方形中的對應點。經過這段路程以後，$f(u)$ 的數值不變。例如（圖 80）從 u 跑到 $u+4K$ 就和先關於 BC 反射再關於 $A'D'$ 反射一樣，這時在 z 平面上就是關於實軸反射兩次，結果自然回到原值。因此知道函數 $f(u)$ 有雙重週期，可藉下列二式表示：

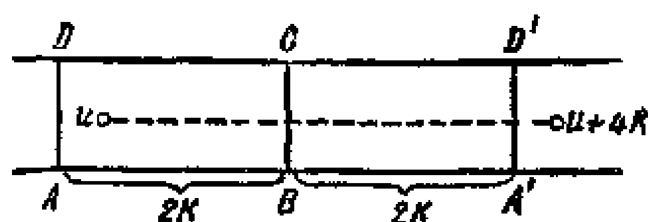


圖 80

$$f(u+4K)=f(u);$$
$$f(u+i2K')=f(u)。$$

這樣得到的單值函數因爲在某些方面和 $\sin u$ 有相似之處，通常記爲

$$z=\mathrm{sn}(u),$$

以後我們還要談到它。將其他的第一類橢圓積分反演我們可以得到其他的雙重週期分函數。下面要談這種函數以及和他們有關的函數的一般理論，可能要更動以前用過的一些記號。

168. 橢圓函數的一般性質 設 ω_1 和 ω_2 是任意二複數，他們的比不是實數。若函數 $f(u)$ 爲分函數，且有兩個週期 ω_1 和 ω_2，即

(30) $$f(u+\omega_1)=f(u);\quad f(u+\omega_2)=f(u)$$

對於任何的 u 都成立，則 $f(u)$ 稱爲橢圓函數。有時我們也說，當變數 u 得到改變量 ω_1 或 ω_2 時函數的值不變。從(30)式可以導出更一般的式子

(31) $$f(u+m_1\omega_1+m_2\omega_2)=f(u),$$

其中 m_1 和 m_2 是任意正的或負的整數。

下面要解釋雙重週期性的幾何意義。設從平面上任一點 A 引兩向量 AB 和 AD，依次與複數 ω_1 和 ω_2 對應。由假設 $\omega_2:\omega_1$ 不是實數，所以這兩向量位於不同的直線上，我們可以用他們做邊作出一個平行四邊形 $ABCD$ 來。將這平行四邊形沿 ω_1 和 ω_2 的方向平行移動，可以得到一個遮蓋全平面的平行四邊形的網(圖 81)。從任一平行四邊形中的點跑到鄰近平行四邊形中的對應點去就等於將 u 改為 $u\pm\omega_1$ 或 $u\pm\omega_2$，由於雙重週期性知 $f(u)$ 的數值不變。每一個上述的平行四邊形叫做函數 $f(u)$ 的一個週期平行四邊形。

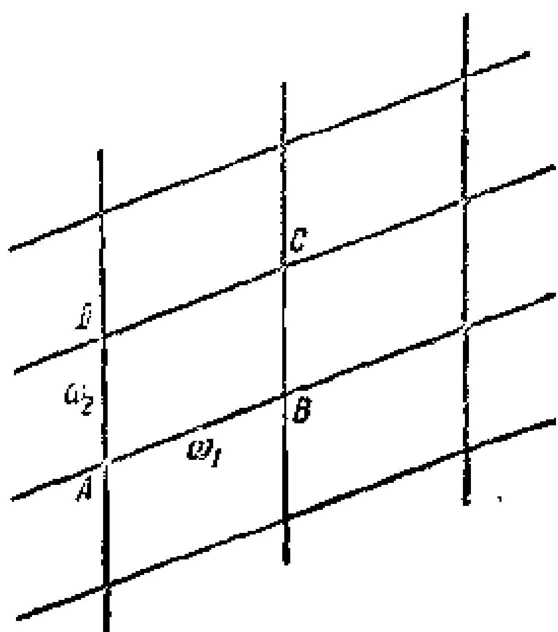


圖 81

注意：如前所述的基本頂點 A 的選取是完全任意的。例如，若取原點 O 爲基本頂點，則所得平行四邊形網的諸頂點的坐標爲 $m_1\omega_1+m_2\omega_2$，卽這些頂點的全體恰好給出函數 $f(u)$ 的週期的全體，如(31)式所示(圖 82)。若取 u 平面中任一點 M，經過 M 畫平行於向量 ω_1 和 ω_2 的直線，則從原點 O 到 M 的向量是兩個向量的和，其中一個向量和 ω_1 平行，另一向量和 ω_2 平行。因此任一複數可以唯一表示爲

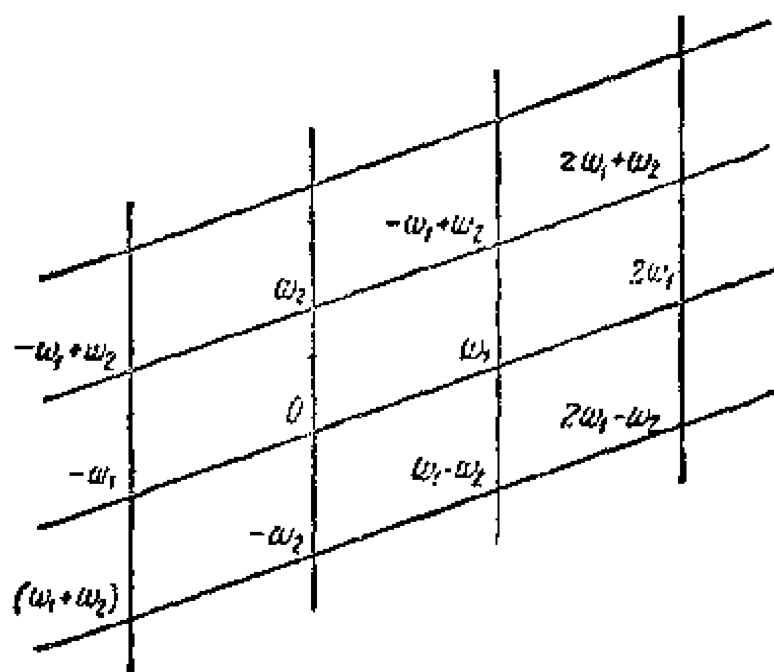


圖 82

$$u=k\omega_1+l\omega_2$$

的形式，其中 k 和 l 都是

實數。這兩個數是 u 這點的斜坐標,假如取和 ω_1 與 ω_2 對應的向量為兩坐標軸上的單位向量。上面我們用過兩平行四邊形中的對應點這一名詞。實際上,就是複坐標之差可以寫成 $m_1\omega_1+m_2\omega_2$ 的兩點,其中 m_1 和 m_2 是整數。在這意義下,平面上任一點必和基本平行四邊形中的一點對應。例如,若取圖 82 中的平行四邊形網,其基本頂點即原點,則平面上任一點 u 的坐標可以寫成

$$u=(k_1\omega_1+k_2\omega_2)+m_1\omega_1+m_2\omega_2,$$

其中 k_1 和 k_2 是實數,滿足條件 $0\leqslant k_1<1$ 和 $0\leqslant k_2<1$,而 m_1 和 m_2 是整數。注意:對於每一個平行四邊形我們祇算他有一個頂點和從這頂點出發的兩條邊。其餘的邊和頂點可以由週期性而得到。

現在要說明橢圓函數的幾個基本性質。微分恆等式(31) n 次以後,得

$$f^{(n)}(u+m_1\omega_1+m_2\omega_2)=f^{(n)}(u),$$

就是說,橢圓函數的導數仍為有同樣週期的橢圓函數。其次,假設 $f(u)$ 沒有極點,即 $f(u)$ 實際上不是分函數而是整函數。他的週期平行四邊形是平面中的有限部分。在這平行四邊形中,連境界線也在內,函數為正則,當然是連續,因此必為有界,即存在一個正數 N,使得在基本週期平行四邊形中 $|f(u)|<N$。在其餘諸平行四過形中 $f(u)$ 的數值和基本平行四過形中的一樣,因此上之等式在全平面上成立,就是說,$f(u)$ 是個全平面為有界的整函數。由利烏微爾定理知 $f(u)$ 必等於常數。於是我們得到下面的定理:

定理 I. 若 $f(u)$ 為雙重週期整函數,則 $f(u)$ 為常數。

由上述定理可以導出兩個非常重要的推論,就是下面要說的。設 $f_1(u)$ 和 $f_2(u)$ 是兩個有相同週期 ω_1 和 ω_2 的橢圓函數。又設他們在週期平行四邊形中有相同的極點以及在極點的無限部分。這時差 $f_2(u)-f_1(u)$ 將是一個沒有極點的雙重週期函數,就是說,是個雙重週期整函數。由定理 I 知道他應該是個常數。故得:

推論 I. 若兩個有相同週期的橢圓函數 $f_1(u)$ 和 $f_2(u)$ 在週期平行四邊形中有相同的極點以及在極點的無限部分，那末他們祇差一個常數項。

現在假設 $f_1(u)$ 和 $f_2(u)$ 在週期平行四邊形中有同樣的極點，其階數亦相同，又有同樣的零點，其重數亦相同，這時他們的比 $f_2(u):f_1(u)$ 在平行四邊形中旣無零點亦無極點，故應等於常數，卽得：

推論 II. 若兩個有相同週期的橢圓函數 $f_1(u)$ 和 $f_2(u)$ 在週期平行四邊形中有同樣的極點和零點，並且極點的階數和零點的重數也都相同，那末他們祇差一個常數因子。

適當取函數 $f(u)$ 的週期平行四邊形，使得函數的極點不在邊界之上，考察函數 $f(u)$ 沿平行四邊形周界的路積分：

(32)

$$\int_{ABCD} f(u)du=\int_{AB} f(u)du+\int_{BC} f(u)du+\int_{CD} f(u)du+\int_{DA} f(u)du。$$

考察 CD 邊上的積分，引進新的積分變數 $v=u-\omega_2$ 以代 u。則在 v 平面上 CD 邊處於 BA 邊的位置。故由函數的週期性有

$$\int_{CD} f(u)du=\int_{BA} f(v+\omega_2)dv=\int_{BA} f(v)dv=-\int_{AB} f(v)dv,$$

就是說，(32) 式右邊第一項與第三項之和爲零。同樣可證第二項與第四項之和爲零，從而

$$\int_{ABCD} f(u)du=0, \tag{33}$$

就是說，如果在平行四週形的周界上沒有橢圓函數 $f(u)$ 的極點，則函數沿平行四邊形周界的路積分等於零。

設 α 爲一複數，使方程 $f(u)-\alpha=0$ 在平行四邊形周界上沒有根。應用以上的結果於橢圓函數

$$\varphi(u)=\frac{f'(u)}{f(u)-\alpha}$$

可得
$$\int_{ABCD}\frac{f'(u)}{f(u)-\alpha}du=0。$$

如我們所知上面的積分表示函數 $f(u)-\alpha$ 的零點個數和極點個數之差[22]，因此，知道方程 $f(u)=\alpha$ 的根的個數等於 $f(u)-\alpha$ 的極點的個數，亦即 $f(u)$ 的極點的個數。就是說，函數 $f(u)$ 在平行四邊形內部取數值 α 與取數值 ∞ 次數相同。

在以上的證明中 α 雖爲任意，但必須使方程 $f(u)=\alpha$ 在平行四邊形的周界上沒有根。假如情形不是這樣，那末可以將平行四邊形略略移動，使得方程的根落在平行四邊形的內部，並且 $f(u)-\alpha$ 的極點也仍舊在平行四邊形的內部。對於移動後的平行四邊形而言，上面的結果成立。易見這結果對於原來的平行四邊形也成立，祇要在計算方程的根的個數時對於每一平行四邊形我們算他有一個頂點和從這頂點出發的兩條邊。此外，要注意如果方程 $f(u)=\alpha$ 有一根 $u=u_0$，並且在 u_0 的附近 $f(u)$ 可以展開爲：

$$f(u)=\alpha+c_k(u-u_0)^k+c_{k+1}(u-u_0)^{k+1}+\cdots, \qquad (c_k\neq 0)$$

那末這個根應算作方程的 k 重根或是函數 $f(u)-\alpha$ 的 k 重零點。在這種約定之下由以上的論斷可得下定理。

定理 II. 橢圓函數在週期平行四邊形中取任何數值(有限或無限)的次數相同。

若 $f(u)$ 在週期平行四邊形中取任何數值 m 次之多，則稱爲 m 階橢圓函數。這種函數變週期平行四邊形爲 m 葉的黎曼曲面。變換的保角性祇在 $f'(u)$ 的零點和 $f(u)$ 的多階極點被破壞了。這種 u 的數值對應於黎曼曲面上的支點。

現在證明正整數 m 不能等於 1。實際上，由 (33) 式立刻知道橢圓函數在週期平行四邊形內各極點的留數之和等於零。若 $m=1$，則函數 $f(u)$ 在平行四邊形中祇有一個單極點，這是和上述結果相矛盾的。因此知道不存在一階的橢圓函數。以後我們要具體地造出二階橢圓函

數來。可以證明二階橢圓函數恰恰就是由第一類橢圓積分反演而得到的橢圓函數。當然,也存在階數更高的橢圓函數。

169. 基本輔助定理 考察初等函數 $\sin u$。這是一個整函數,以 $u=k\pi(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 爲單零點,他們都分佈在實軸之上,相鄰兩點的距離等於 π。另二基本函數

$$\operatorname{ctg} u=\frac{(\sin u)'}{\sin u}=\frac{\cos u}{\sin u} \quad \text{和} \quad -(\operatorname{ctg} u)'=\frac{1}{\sin^2 u} \tag{34}$$

則以這些點爲單重和二重極點。函數 $\sin u$ 可以表示爲無窮乘積,而函數(34)則可展開爲最簡分數的級數。在下一段裏面我們要對以諸點

$$m_1\omega_1+m_2\omega_2 \tag{35}$$

爲單零點的整函數做完全類似的表示式,其中 ω_1 和 ω_2 是複數,他們的比不是實數,m_1 和 m_2 是任意整數。(35)中諸點卽 82 圖所繪平行四邊形網的頂點。要造出這個整函數我們可以應用維爾史特拉斯將整函數表示爲無窮乘積的公式。但要應用這公式時必須決定一個整數 p,使得

$$\sum_{m_1, m_2}{}' \frac{1}{|m_1\omega_1+m_2\omega_2|^p} \tag{36}$$

爲收斂級數。求和符號右上角的一小撇表示其中沒有對應於 $m_1=$ $=m_2=0$ 的項。以後如在求和符號或乘積符號的右上角遇到同樣的小撇時,其意義都和現在所說的類似。我們可以把(36)中的和改寫成

$$\sum_{m_1, m_2}{}' \frac{1}{\delta_{m_1, m_2}^p}, \tag{37}$$

其中 δ_{m_1, m_2} 表示圖 82 中從原點到複坐標爲 $m_1\omega_1+m_2\omega_2$ 的頂點間的距離。假設 2δ 是這網中從原點到非原點的頂點間的最短距離。那末,顯然,2δ 同時也是這網中頂點與頂點之間的最短距離。設想在圖 82 中以原點爲中心,n 和 $(n+1)$ 爲半徑畫兩個圓,其中 n 是正整數,滿足條件 $n>\delta$。設 K_n 爲這兩圓周之間的閉環域。現在要估計在 K_n 中的頂點個數。

假設這個數是 t_n。以 K_n 中每一個頂點爲中心畫一個半徑等於 δ 的圓。由 δ 的定義可知這些圓互不相疊，並且他們的面積總和 $\pi\delta^2 t_n$ 小於內半徑爲 $(n-\delta)$ 外半徑爲 $(n+1+\delta)$ 的環域的圓積，即

$$\pi(n+1+\delta)^2-\pi(n-\delta)^2>\pi\delta^2 t_n$$

經過簡單的計算可得

$$t_n<A_1 n+A_2 \qquad \left(A_1=\frac{4\delta+2}{\delta^2};\ A_2=\frac{2\delta+1}{\delta^2}\right)。$$

對於 K_n 中每一個頂點而言，距離 δ_{m_1,m_2} 不會小於 n，因此級數(37)中對應於 K_n 中諸頂點的各項的和常小於

$$\frac{A_1 n+A_2}{n^p}=\frac{A_1}{n^{p-1}}+\frac{A_2}{n^p}。$$

這估計對於級數 (37) 中各項，其 δ_{m_1,m_2} 比 δ 大得相當多的，例如，$\delta_{m_1,m_2}>\delta+1$，常能適用。因爲這時對應的頂點必定在某一環域 K_n 中，$n>\delta$。丟掉級數 (37) 中有限項，而將其餘各項以更大的數值來代替，即得這級數的優勝級數

$$\sum_n\left(\frac{A_1}{n^{p-1}}+\frac{A_2}{n^p}\right)。$$

如 [I, 22] 中所知當 $p>2$ 時上之級數收斂，特別，當 $p=3$ 時爲收斂。故得：

基本輔助定理　當 $p>2$，特別，當 $p=3$ 時，級數(36)收斂。

170. 維爾史特拉斯函數　爲書寫便利起見，記

$$w=m_1\omega_1+m_2\omega_2。\tag{38}$$

應用基本輔助定理立刻可以作出一個以(38)中諸點爲單重零點的整函數。這函數由下式定義[69]：

$$\sigma(u)=u\prod_{m_1,m_2}{}'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2},\tag{39}$$

其中無窮乘積展佈於所有的 m_1 和 m_2 的整數對，除了 $m_1=m_2=0$ 的特別情形以外。

如[68]中所已知，我們可以求這乘積的對數導數，好像求有限乘積的對數導數一樣。因爲乘積中每一單獨項的對數導數是

$$\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}-\frac{1}{w}\frac{1}{1-\frac{u}{w}}=\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2},$$

所以就得到第二個函數

$$\zeta(u)=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=\frac{1}{u}+\sum_{m_1,m_2}{}'\left(\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right), \tag{40}$$

他以(38)中諸點爲單極點。這函數由 $\sigma(u)$ 導出，恰像 $\operatorname{ctg} u$ 之由 $\sin u$ 導出一樣。注意級數

$$\sum_{m_1,m_2}{}'\frac{1}{|w|^3}$$

爲收斂的事實，易證級數(40)在任何有限區域中一致收斂，如果除去其中有限個在這區域中有極點的項以外。微分函數(40)再變其號，可得另一函數

$$\wp(u)=-\zeta'(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_{m_1,m_2}{}'\left[\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right]。 \tag{41}$$

由 $\zeta(u)$ 導出這個新的函數恰像由 $\operatorname{ctg} u$ 導出 $\frac{1}{\sin^2 u}$ 一樣。他以諸點 w 爲二階極點。級數(41)在前述區域中亦爲一致收斂[12]。

現在說明上述諸函數的一些基本性質。寫出 $\sigma(-u)$ 的展開式

$$\sigma(-u)=-u\prod_{m_1,m_2}{}'\left(1+\frac{u}{w}\right)e^{-\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2}。$$

因爲這乘積是展佈於所有的 m_1 和 m_2 的整數對，除了 $m_1=m_2=0$ 以外，故可改變等式右邊 m_1 和 m_2 的符號，卽改 w 爲 $-w$，而不變函數的值，這樣，就得到

$$\sigma(-u)=-u\prod_{m_1,m_2}{}'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2}=-\sigma(u),$$

就是說，$\sigma(u)$ 是個奇函數。同樣可證 $\zeta(u)$ 也是奇函數，而 $\wp(u)$ 是偶函數。這由公式

(42) $$\zeta(u)=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)};\quad \wp(u)=-\zeta'(u)$$

以及奇函數的導函數是偶函數，偶函數的導函數是奇函數的事實立刻可知。此外，由定義諸函數的公式立刻可得：

(43) $$\frac{\sigma(u)}{u}\bigg|_{u=0}=1;\quad u\zeta(u)\bigg|_{u=0}=1;\quad u^2\wp(u)\bigg|_{u=0}=1。$$

函數 $\sigma(u)$ 和 $\zeta(u)$ 不能有週期 ω_1 和 ω_2，因爲前者是整函數，而後者在平行四邊形中祇有一個單極點。現在證明函數 $\wp(u)$ 以 ω_1 和 ω_2 爲週期。爲此，求他的導函數，得

$$\wp'(u)=-\frac{2}{u^3}-\sum_{m_1,m_2}{}'\frac{2}{(u-w)^3}$$

或 $$\wp'(u)=-2\sum_{m_1,m_2}\frac{1}{(u-w)^3}=-2\sum_{m_1,m_2}\frac{1}{(u-m_1\omega_1-m_2\omega_2)^3},$$

等式右邊的和展佈於所有的整數對 m_1 和 m_2 之上而無例外。由此可得

$$\wp'(u+\omega_1)=-2\sum_{m_1,m_2}\frac{1}{(u_1+\omega_1-m_1\omega_1-m_2\omega_2)^3}=$$

$$=-2\sum_{m_1,m_2}\frac{1}{[u-(m_1-1)\omega_1-m_2\omega_2]^3}。$$

當 m_1 跑過所有的整數值時 (m_1-1) 亦如此，因此知道

$$\wp'(u+\omega_1)=\wp'(u),$$

同樣可證 $\wp'(u+\omega_2)=\wp'(u)$。故得

(44) $$\wp'(u+\omega_k)=\wp'(u)\qquad (k=1,\ 2)。$$

現在考察當 u 得到改變量 ω_1 或 ω_2 以後函數 $\wp(u)$ 如何變化。將(44)積分，得

$$\wp(u+\omega_k)=\wp(u)+C_k,$$

其中 C_k 是個常數。在這等式中置 $u=-\frac{\omega_k}{2}$，並注意 $\frac{\omega_k}{2}$ 不是 $\wp(u)$ 的極點，得

$$\wp\left(\frac{\omega_k}{2}\right)=\wp\left(-\frac{\omega_k}{2}\right)+C_k,$$

因爲 $\wp(u)$ 是偶函數，$\wp\left(-\frac{\omega_k}{2}\right)=\wp\left(\frac{\omega_k}{2}\right)$，從而 $C_k=0$，卽

$$\wp(u+\omega_k)=\wp(u)。\qquad (k=1, 2) \tag{45}$$

現在考察當 u 得到改變量 ω_k 時函數 $\zeta(u)$ 如何變化。由(45)與(42)有

$$\zeta'(u+\omega_k)=\zeta'(u),$$

將這式子積分，得到

$$\zeta(u+\omega_k)=\zeta(u)+\eta_k, \qquad (k=1, 2) \tag{46}$$

其中 η_k 是常數，就是說，當 u 得到改變量 ω_k 時函數 $\zeta(u)$ 增加了一個常數項 η_k。由(46)式可以導出更一般的式子：

$$\zeta(u+m_1\omega_1+m_2\omega_2)=\zeta(u)+m_1\eta_1+m_2\eta_2, \tag{47}$$

其中 m_1 和 m_2 是任意整數。

η_k 可以用函數 $\zeta(u)$ 的特別值來表示。在(46)式中置 $u=-\frac{\omega_k}{2}$，並注意 $\zeta(u)$ 是奇函數，卽得

$$\eta_k=2\zeta\left(\frac{\omega_k}{2}\right)。\qquad (k=1, 2) \tag{48}$$

現在回到函數 $\sigma(u)$。由(46)及(42)可寫

$$\frac{\sigma'(u+\omega_k)}{\sigma(u+\omega_k)}=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}+\eta_k。$$

積分，得 $\qquad \lg\sigma(u+\omega_k)=\lg\sigma(u)+\eta_k u+D_k$

或 $$\sigma(u+\omega_k)=C_k e^{\eta_k u}\sigma(u),$$

其中 $C_k=e^{D_k}$ 是常數。要決定這個常數可在上式中置 $u=-\frac{\omega_k}{2}$：

$$\sigma\left(\frac{\omega_k}{2}\right)=C_k e^{-\frac{\eta_k\omega_k}{2}}\sigma\left(-\frac{\omega_k}{2}\right)。$$

但 $\sigma(u)$ 爲奇函數，約去等式兩邊的公因子 $\sigma\left(\frac{\omega_k}{2}\right)$，卽得

$$C_k = -e^{\frac{\eta_k \omega_k}{2}},$$

從而

$$(49) \qquad \sigma(u+\omega_k) = -e^{\eta_k\left(u+\frac{\omega_k}{2}\right)}\sigma(u). \qquad (k=1,\ 2)$$

就是說，當 u 得到改變量 ω_k 時函數 $\sigma(u)$ 得到一個指數型的乘數。代替(49)式我們還可以得到與(47)式類似的更一般的公式：

$$(50) \qquad \sigma(u+w) = \varepsilon e^{\eta\left(u+\frac{w}{2}\right)}\sigma(u),$$

其中 $w = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$; $\eta = m_1\eta_1 + m_2\eta_2$，又 $\varepsilon = +1$ 或 $\varepsilon = -1$ 看 m_1 和 m_2 是或不是同為偶數。在後面一種情形下(50)式可以立刻由(47)式導出，恰像(49)式可由(46)式導出一樣。我們以後要用到的祇是 $m_1 = m_2 = 1$ 的情形。

在這一段的最後我們要導出一個聯繫常數 ω_k 和 η_k 的關係式。首先，確定兩個週期 ω_1 和 ω_2 間的次序。考察81圖中的基本平行四邊形 $ABCD$。從他的一邊 AB 到另一邊 AD 是一個小於 π 的正的角度。以後我們常設開始計算這小於 π 的正角度的邊 AB 對應於複數 ω_1，而計算終止的那一邊 AD 對應於複數 ω_2。這時分數 $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ 的輻角就在 0 和 π 之間，就是說，這分數的虛數部分應該是正的。倒數 $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ 的虛數部分顯然是負的。總之，我們常常這樣決定 ω_k 使得 $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ 的虛數部分是正的。

適當選取基本頂點 $A(u=u_0)$ 作平行四邊形，使包含 $\zeta(u)$ 的極點在其內部。由(40)知 $\zeta(u)$ 在這唯一的極點的留數等於 1，由留數理論的基本定理知 $\zeta(u)$ 沿平行四邊形周界的積分等於 $2\pi i$，即

$$\int_{u_0}^{u_0+\omega_1}\zeta(u)du + \int_{u_0+\omega_1}^{u_0+\omega_1+\omega_2}\zeta(u)du + \int_{u_0+\omega_1+\omega_2}^{u_0+\omega_2}\zeta(u)du +$$

$$+\int_{u_0+\omega_2}^{u_0}\zeta(u)du = 2\pi i.$$

在第二個積分中改積分變數 u 為另一變數 $v_1 = u - \omega_1$，在第三個積分中改積分變數 u 為另一變數 $v_2 = u - \omega_2$，則得

$$\int_{u_0}^{u_0+\omega_1}\zeta(u)du+\int_{u_0}^{u_0+\omega_2}\zeta(v_1+\omega_1)dv_1+\int_{u_0+\omega_1}^{u_0}\zeta(v_2+\omega_2)dv_2+$$
$$+\int_{u_0+\omega_1}^{u_0}\zeta(u)du=2\pi i,$$

其中每一積分所在的路線皆爲直線段。改變記號可以寫成：

$$\int_{u_0}^{u_0+\omega_2}[\zeta(u+\omega_1)-\zeta(u)]du-\int_{u_0}^{u_0+\omega_1}[\zeta(u+\omega_2)-\zeta(u)]du=2\pi i。$$

由這式和(46)式立刻得到所要求的關係：

(51) $$\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1=2\pi i。$$

這個式子通常稱爲勒上特關係式。

維爾史特拉斯首先作出函數 $\sigma(u)$，$\zeta(u)$ 和 $\wp(u)$ 來。由他們的定義可知兩個複數 ω_1 和 ω_2 可以任意選取，祇要受到一個限制，即他們的比不等於實數好了。因此這些函數不僅是 u 的函數，並且也是複參數 ω_1 和 ω_2 的函數。因爲這個緣故他們有時也記作

(52) $$\sigma(u;\ \omega_1,\ \omega_2);\quad \zeta(u;\ \omega_1,\ \omega_2);\quad \wp(u;\ \omega_1,\ \omega_2)。$$

171．$\wp(u)$ 所滿足的微分方程　已經知道了維爾史特拉斯函數的基本性質以後，現在再來對函數 $\wp(u)$ 作更詳細的研究，特別，要決定這函數所滿足的一階微分方程。首先，我們要求 $\wp(u)$ 在他的二階極點 $u=0$ 鄰近的展開式。爲此，回到基本公式(41)去。在 $u=0$ 鄰近有：

$$\frac{1}{w-u}=\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}+\cdots+\frac{u^n}{w^{n+1}}+\cdots$$

關於 u 微分，得

$$\frac{1}{(w-u)^2}=\frac{1}{w^2}+\frac{2u}{w^3}+\cdots+\frac{(n+1)u^n}{w^{n+2}}+\cdots$$

代入(41)式中卽得 $\wp(u)$ 在 $u=0$ 鄰近的展開式：

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)u^n\sum_{m_1,m_2}{}'\frac{1}{w^{n+2}}。$$

對於奇數的 n 上式右邊關於 m_1 和 m_2 求和的級數的值爲零，因爲其中包含對對符號相反而數值相等的項。因此有

(53) $$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+c_2u^2+c_3u^4+\cdots+c_nu^{2n-2}+\cdots,$$

其中

(54) $$c_n=(2n-1)\sum_{m_1,m_2}{}'\frac{1}{w^{2n}}。\qquad (n=2,3,\cdots)$$

由(53)式出發容易求得 $\wp'^2(u)$ 和 $\wp^3(u)$ 的展開式。顯然有

$$\wp'(u)=-\frac{2}{u^3}+2c_2u+4c_3u^3+\cdots$$

$$\wp'^2(u)=\frac{4}{u^6}-\frac{8c_2}{u^2}-16c_3+\cdots$$

$$\wp^3(u)=\frac{1}{u^6}+\frac{3c_2}{u^2}+3c_3+\cdots,$$

其中後二式中沒有寫出來的各項都含 u 的正冪。由此可得：

(55) $$\wp'^2(u)-4\wp^3(u)+20c_2\wp(u)=-28c_3+\cdots,$$

等式右邊沒有寫出來的各項亦都含 u 的正冪。因此知道 $u=0$ 並非等式左邊的函數的極點。但因函數 $\wp(u)$ 的僅有的極點卽 $u=0$ 以及和 $u=0$ 相當的其他各平行四邊形的頂點，所以知道(55)式左邊是一個在週期平行四邊形中沒有極點的橢圓函數，亦卽在全平面沒有極點的橢圓函數，故必等於常數。但是該式右邊當 $u=0$ 時等於 $-28c_3$，故必恆等於 $-28c_3$，卽

$$\wp'^2(u)=4\wp^3(u)-20c_2\wp(u)-28c_3。$$

現在引進下列記號：

(56) $$g_2=20c_2=60\sum_{m_1,m_2}{}'\frac{1}{w^4};\quad g_3=28c_3=140\sum_{m_1,m_2}{}'\frac{1}{w^6}。$$

總結以上的結果可得下面的定理：

定理：函數 $\wp(u)$ 滿足微分方程

(57) $$\wp'^2(u)=4\wp^3(u)-g_2\wp(u)-g_3。$$

g_2 和 g_3 稱爲函數 $\wp(u)$ 的不變數。

函數 $\wp(u)$ 在以 $u=0$ 爲基本頂點的週期平行四邊形中祇有一個二

階極點 $u=0$。平行四邊形的其他頂點我們算作是不屬於這平行四邊形的，由此知道 $\wp(u)$ 是二階橢圓函數，對任一已給複數 α 方程 $\wp(u)=\alpha$ 在週期平行四邊形中有兩個根。

若 $\wp(u_0)=\alpha$ 及 $\wp'(u_0)=0$，則 $u=u_0$ 至少應是方程 $\wp(u)=\alpha$ 的二重根。但也不能高於二重，因爲 $\wp(u)$ 是二階橢圓函數。所以在這情形 $\wp(u)$ 祇在平行四邊形中一點 $u=u_0$ 取數值 α。若 $\wp'(u_0)\neq 0$，則方程 $\wp(u)=\alpha$ 在平行四邊形中有兩個不同的單根。現在研究那一種 u 的數值可以使 $\wp'(u)=0$。在恆等式

$$\wp'(u+\omega_k)=\wp'(u)\quad 或\quad \wp'(u+\omega_1+\omega_2)=\wp'(u)$$

中置 $u=-\dfrac{\omega_k}{2}$ 或 $u=-\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$，因爲 $\wp'(u)$ 是奇函數，故得：

$$\wp'\left(\frac{\omega_k}{2}\right)=0\ \ (k=1,2)\quad 和\quad \wp'\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)=0, \tag{58}$$

就是說，$\wp'(u)$ 在兩邊的中點以及平行四邊形對角線的中點等於零。考察函數 $\wp(u)$ 在這些點的數值，設

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)=e_1;\quad \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)=e_2;\quad \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)=e_3。 \tag{59}$$

每一方程 $\wp(u)=e_k$ 在對應的點都有二重根。因 $\wp(u)$ 是二階橢圓函數，故知諸數 e_k 互不相同。

現在回到(57)式。這式子的右邊是 $\wp(u)$ 的三次式。置 $u=\dfrac{\omega_k}{2}$ 或 $u=\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$，可知這三次式當 $\wp(u)=e_k$ 時其值爲零，因爲這時等式左邊等於零的緣故。這樣，將三次式分解因子，可以改寫(57)式爲

$$\wp'^2(u)=4[\wp(u)-e_1][\wp(u)-e_2][\wp(u)-e_3]。 \tag{60}$$

比較(57)和(60)兩式的右邊，得到諸數 e_k 和不變數 g_2 與 g_3 之間的關係：

$$e_1+e_2+e_3=0,\quad e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1=-\frac{1}{4}g_2;\quad e_1e_2e_3=\frac{1}{4}g_3。 \tag{61}$$

若置 $x=\wp(u)$，則方程(57)可以改寫成：

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2=4x^3-g_2x-g_3。$$

當 $u=0$ 時 $x=\infty$，故將上式分離變數然後積分，卽得

$$u=\int_\infty^x\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},\tag{62}$$

就是說，函數 $\wp(u)$ 可以由第一類橢圓積分 (62) 反演而得到。反過來，可以證明對於任意選取的常數 g_2 和 g_3，祇要根號裏面的三次式沒有重根，積分(62)的反演常爲維爾史特拉斯函數 $\wp(u)$。

還可以證明任一週期爲 ω_1 和 ω_2 的橢圓函數必定是 $\wp(u)$ 和 $\wp'(u)$ 的有理函數，因此也就得知：$\wp'(u)$和 $\wp(u)$ 的有理函數的全體就是以 ω_1 和 ω_2 爲週期的橢圓函數的全體。

172. 函數 $\sigma_k(u)$ 由(60)式知道該式右邊的乘積是單値解析函數 $\wp'(u)$ 的完全平方。現在要證明其中的每一個因子 $\wp(u)-e_k$ 也都是完全平方。這和三角函數的情形完全相類似：

$$(\cos u)'^2=\sin^2u=(1-\cos u)(1+\cos u),$$

而等式右邊每一個因子也是單値解析函數的完全平方：

$$1-\cos u=2\sin^2\frac{u}{2}\quad 和 \quad 1+\cos u=2\cos^2\frac{u}{2}。$$

要證明 $\wp(u)-e_k$ 都是完全平方，我們先導出一個輔助公式。考察一個 u 的函數

$$\wp(u)-\wp(v)\tag{63}$$

他在以 $u=0$ 爲基本頂點的平行四邊形中有一個二階極點 $u=0$。因爲 $\wp(u)$ 是偶函數，(63) 的零點是平行四邊形中複坐標爲 $u=\pm v$ 的點，嚴格些說，是平行四邊形中和 $\pm v$ 相差等於週期的點。如果這種點之中有等於半週期的，那末上述兩點就合爲一個二重點。與函數 (63) 同時我們再來研究函數

$$f(u)=\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)}。\tag{64}$$

首先證明 $f(u)$ 也以 ω_1 和 ω_2 爲週期。實際上，由(49)有

$$f(u+\omega_k)=\frac{\sigma(u-v+\omega_k)\sigma(u+v+\omega_k)}{\sigma^2(u+\omega_k)}=$$

$$=\frac{e^{\eta_k\left(u-v+\frac{\omega_k}{2}\right)}\sigma(u-v)e^{\eta_k\left(u+v+\frac{\omega_k}{2}\right)}\sigma(u+v)}{e^{2\eta_k\left(u+\frac{\omega_k}{2}\right)}\sigma^2(u)}=$$

$$=\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)}=f(u)。$$

這就證明了 $f(u)$ 是以 ω_1 和 ω_2 爲週期。由(64)式立刻知道 $f(u)$ 在基本平行四邊形中有二重極點 $u=0$ 和兩個零點，他們是平行四邊形中與 $\pm v$ 相差等於週期的點。實際上，我們知道這是因爲函數 $\sigma(u)$ 祇以諸點 $w=m_1\omega_1+m_2\omega_2$ 爲單零點的緣故。這樣，函數(63)和(64)同以 ω_1 和 ω_2 爲週期，在基本平行四邊形中有相同的極點和零點，並且階數也相同，因此他們祇差一個常數因子[168]：

$$\wp(u)-\wp(v)=C\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)}。$$

要決定常數 C 可以用 u^2 乘等式兩邊，然後再置 $u=0$

$$u^2\wp(u)-u^2\wp(v)\Big|_{u=0}=\frac{C\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\left[\dfrac{\sigma(u)}{u}\right]^2}\Bigg|_{u=0}。$$

由(43)式得

$$1=C\sigma(-v)\sigma(v)=-C\sigma^2(v),$$

於是得到我們所求的公式

$$\wp(u)-\wp(v)=-\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(v)\sigma^2(u)}。\tag{65}$$

要證明 $\wp(u)-e_k$ 是完全平方，我們祇要在(65)式中置

$$v=\frac{\omega_1}{2};\quad v=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\quad 和\quad v=\frac{\omega_2}{2}。$$

例如，

$$(66)\qquad \wp(u)-e_1=\wp(u)-\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)=-\frac{\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma^2\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma^2(u)},$$

或由(49)式有

$$\sigma\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)=\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}+\omega_1\right)=-e^{\eta_1\left(u-\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_1}{2}\right)}\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right),$$

即

$$(67)\qquad \sigma\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)=-e^{\eta_1 u}\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right),$$

故(66)式可以改寫爲

$$\wp(u)-e_1=e^{\eta_1 u}\frac{\sigma^2\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma^2\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma^2(u)}$$

$$\wp(u)-e_1=\left[\frac{e^{\frac{1}{2}\eta_1 u}\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}-u\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma(u)}\right]^2。$$

其餘兩個式子可以完全類似地得出來。這樣,我們就將 $\wp(u)-e_k$ 表示爲兩個整函數的商的平方:

$$(68)\qquad \wp(u)-e_k=\left[\frac{\sigma_k(u)}{\sigma(u)}\right]^2,$$

其中

$$(69)\begin{cases}\sigma_1(u)=e^{\frac{1}{2}\eta_1 u}\dfrac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}-u\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}\\[2ex] \sigma_2(u)=e^{\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)u}\dfrac{\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}-u\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)};\quad \sigma_3(u)=e^{\frac{1}{2}\eta_2 u}\dfrac{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}-u\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}。\end{cases}$$

下面講幾點函數 $\sigma_k(u)$ 的性質。這些函數顯然是整函數,置 $u=0$,得

(70) $$\sigma_k(0)=1。\qquad (k=1,2,3)$$

改寫(67)式爲

$$\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}-u\right)=e^{-\eta_1 u}\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}+u\right),$$

代入(69)的第一式,得

$$\sigma_1(u)=e^{-\frac{1}{2}\eta_1 u}\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}+u\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}=\sigma_1(-u)$$

對於另外兩個 $\sigma_k(u)$ 也有同樣的情形,就是說,$\sigma_k(u)$ 是偶函數。

將(68)式代入(60)式的右邊,開方,得

$$\wp'(u)=\pm 2\frac{\sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}。$$

要決定上式中的符號,可以用 u^3 乘等式兩邊,再置 $u=0$。由展開式

$$\wp'(u)=-\frac{2}{u^3}+2c_2u+4c_3u^3+\cdots$$

以及(70)和(43)式易知前式右邊應取負號,即

(71) $$\wp'(u)=-2\frac{\sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}。$$

173. 週期整函數的展開式 整函數 $\sigma(u)$ 根本沒有週期。以後我們要證明,給他附上指數型的乘數以後可以變爲一個有週期的整函數。現在我們先研究一般的週期整函數,並求其展開式。這展開式具冪級數或福里哀級數的形式[參考 119]。

假設整函數 $\varphi(u)$ 有週期 ω,即對任何複數 u 有

(72) $$\varphi(u+\omega)=\varphi(u)。$$

從原點引向量 ω,再畫兩條直線和這向量垂直,分別通過他的起點和終點(83 圖)。這兩直線作成函數 $\varphi(u)$ 的週期帶。直線 CD 可以由直線 AB 經過變換 $u'=u+\omega$ 而得到。作變換 $\tau=\frac{u\cdot 2\pi i}{\omega}$,則上述 u 平

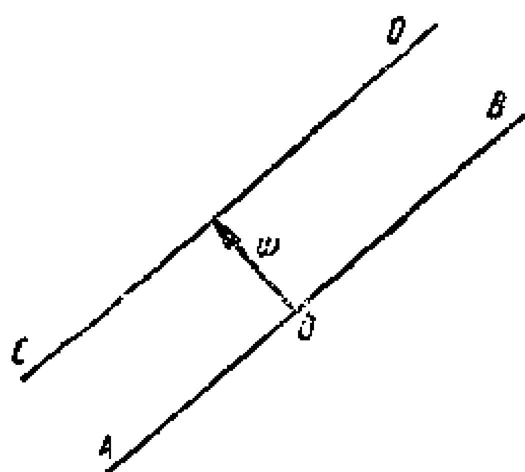


圖 83

面中的週期帶變爲 $\tau=\tau_1+i\tau_2$ 平面中由直線 $\tau_2=0$ 和 $\tau_2=2\pi$ 所圍成的帶域。如果我們再作變換

$$\zeta=e^{\tau}=e^{\frac{2\pi i u}{\omega}},$$

那末這 τ 平面中的帶域就變爲 ζ 平面的全部，除了 $\zeta=0$ [19] 以及沿正實軸的割線。割線的兩岸和原來 u 平面中帶域的兩境界直線相對應，割線兩岸上位置相同的點對應於帶域的境界直線上滿足關係 $u'=u+\omega$ 的兩點。由 (72) 式知道函數在割線兩岸上位置相同的點取相同的數值，因此他的任何階導數亦是如此，簡言之，即函數不僅在具有割線的 ζ 平面中爲正則單值，他根本在整個 ζ 平面中除了 $\zeta=0$ 這點以外爲正則單值。因此他在這平面上就可展開爲羅朗級數

$$\varphi(u)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\zeta^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{\frac{2\pi i u}{\omega}n}。\tag{73}$$

這樣，就得到下面的定理。

定理：任一週期爲 ω 的整函數 $\varphi(u)$ 可以在全平面上用級數來表示：

$$\varphi(u)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{\frac{2\pi i u}{\omega}n}。\tag{74}$$

上面的級數顯然在平面中的任何有限部分爲一致收斂。如果將其中與絕對值相同而符號相反的 n 對應的每兩項併在一起，並應用尤拉公式，即得函數 $\varphi(u)$ 的三角級數表示式：

$$\varphi(u)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n'\cos\frac{2\pi un}{\omega}+b_n'\sin\frac{2\pi un}{\omega}\right),\tag{75}$$

其中

$$a_n'=a_n+a_{-n};\quad b_n'=i(a_n-a_{-n})。\qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)\tag{76}$$

174. 新的記號 要詳細敍述橢圓函數的理論必需經過許多式子的演算，這些式子的演算在應用橢圓函數的時候也是必不可少的。可惜許多數學家在寫作的時候大家沒有採用統一的記號。我們這裏祇談最基本的理論，不準備引進許多在橢圓函數論中常常是很有用的公式。雖然如此，以後我們還是要遇到比現在更複雜的式子演算。爲此，我們將採用一些記號，他們主要的是由夏可皮所首創，後來又在虎維兹的書“函數的一般理論與橢圓函數”中有系統地被引用。以下幾段裏面所講的都取材於這本書中。

以後我們常會遇到 ω_1 和 ω_2 的一半，爲了避免分數起見，故記

(77) $$\omega_1=2\omega;\quad \omega_2=2\omega'。$$

與此對應改記

(78) $$\eta_1=2\eta;\quad \eta_2=2\eta'。$$

建造以後要用的許多函數的基本元素不是 ω_1 和 ω_2 自己，好像對於函數 $\wp(u)$ 一般，而是他們的比

(79) $$\tau=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{\omega'}{\omega},$$

或是與這比密切相關的另一數量

(80) $$h=e^{i\pi\tau}。$$

變數 u 也將被另外兩個變數

(81) $$v=\frac{u}{2\omega};\quad z=e^{i\pi v}=e^{\frac{i\pi u}{2\omega}}$$

所代替。

以上的這些記號關於 ω 和 ω' 是非對稱的，就是說，ω 和 ω' 在這些記號中將起不同的作用。和從前一樣，我們常假設在比值 $\frac{\omega'}{\omega}$ 中 i 的係數是正的，卽若置 $\frac{\omega'}{\omega}=r+is$，則 $s>0$，從而

(82) $$|h|=e^{-\pi s}<1。$$

對於這樣選取的 ω_1 和 ω_2 勒上特關係式 (51) 成立，他在新的記號

下改爲下面的形式：

(83) $$\eta\omega'-\eta'\omega=\frac{1}{2}\pi i_{\circ}$$

注意： 由上面採用的這些記號容易得到下列幾個關係。由(81)式有

$$\frac{u+\omega}{2\omega}=v+\frac{1}{2};\ \frac{u+2\omega}{2\omega}=v+1;\ e^{i\pi\left(v+\frac{1}{2}\right)}=iz;\ e^{i\pi(v+1)}=-z,$$

同樣

$$\frac{u+\omega'}{2\omega}=v+\frac{\tau}{2};\ \frac{u+2\omega'}{2\omega}=v+\tau;\ e^{i\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)}=h^{\frac{1}{2}}z;\ e^{i\pi(v+\tau)}=hz,$$

就是說，例如，u 得到改變量 ω 相當於 v 得到改變量 $\frac{1}{2}$，或是用 i 乘 z；u 得到改變量 ω' 相當於 v 得到改變量 $\frac{\tau}{2}$，或是用 $h^{\frac{1}{2}}$ 乘 z。還要注意，我們常定義 h^{ρ} 和 z^{ρ} 的值爲 $e^{i\pi\tau\rho}$ 和 $e^{i\pi v\rho}$。

175. 函數 $\vartheta_1(v)$ 在新記號之下函數 $\sigma(u)$ 的基本性質具如下的形式：

(84) $$\sigma(u+2\omega)=-e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u);\ \sigma(u+2\omega')=-e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma(u)_{\circ}$$

給 $\sigma(u)$ 乘上一個指數型的乘數，得

(85) $$\varphi(u)=e^{au^2+bu}\sigma(u)$$

適當選取 a 和 b 可使函數 $\varphi(u)$ 具有週期 2ω。由(84)有

$$\varphi(u+2\omega)=-e^{a(u+2\omega)^2+b(u+2\omega)+2\eta(u+\omega)}\sigma(u)=$$
$$=-e^{4a\omega u+4a\omega^2+2b\omega+2\eta(u+\omega)}e^{au^2+bu}\sigma(u),$$

或

(86) $$\frac{\varphi(u+2\omega)}{\varphi(u)}=-e^{2(2a\omega+\eta)(u+\omega)+2b\omega}$$

同樣可得

(87) $$\frac{\varphi(u+2\omega')}{\varphi(u)}=-e^{2(2a\omega'+\eta')(u+\omega')+2b\omega'}{}_{\circ}$$

(86)式右邊指數上是 u 的一次式。要使得右邊對於任何的 u 常等於 1，必需在指數上 u 的係數等於零，而常數項等於 $k\pi i$，其中 k 是奇

數。因此我們可以取

$$a=-\frac{\eta}{2\omega},\quad b=\frac{\pi i}{2\omega}。$$

代入(87)式右邊，由(83)有：

$$\frac{\varphi(u+2\omega')}{\varphi(u)}=-e^{-\frac{\pi i}{\omega}(u+\omega')+\pi i\frac{\omega'}{\omega}}=-e^{-\frac{\pi i u}{\omega}}=-z^{-2}。$$

故知對於函數

$$\varphi(u)=e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}+\frac{i\pi u}{2\omega}}\sigma(u)=e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}z\sigma(u) \tag{88}$$

成立等式

$$\varphi(u+2\omega)=\varphi(u),\quad \varphi(u+2\omega')=-z^{-2}\varphi(u)。 \tag{89}$$

因爲 $\varphi(u)$ 是週期爲 2ω 的整函數，故有如下形式的展開式[173]

$$\varphi(u)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{\frac{2\pi i u}{2\omega}n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n z^{2n}。$$

其次，我們知道 u 得到改變量 $2\omega'$ 時 z 得到乘數 h，即

$$\varphi(u+2\omega')=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n h^{2n}z^{2n},$$

代入(89)的第二式，得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n h^{2n}z^{2n}=-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n z^{2n-2},$$

若改後一級數中的 n 爲 $n+1$，則得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n h^{2n}z^{2n}=-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_{n+1}z^{2n}。$$

比較 z 的同次冪的係數，得

$$a_{n+1}=-h^{2n}a_n=-h^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}a_n,$$

或可改寫成下面的形式

$$(-1)^{n+1}h^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}a_{n+1}=(-1)^n h^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}a_n。$$

因此知道　$(-1)^n h^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}a_n$

對於所有的整數 n 其值常一定。置

$$(-1)^n h^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} a_n = Ci,$$

其中 C 是常數。由此得到函數 $\varphi(u)$ 的展開式中係數的表示式：

$$a_n = (-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} Ci,$$

從而

(90) $$\varphi(u) = Ci \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n}。$$

(88)式將維爾史特拉斯函數 $\sigma(u)$ 表示爲：

(91) $$\sigma(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} z^{-1} \varphi(u)。$$

這使我們自然地引進一個新的函數

(92) $$\vartheta_1(v) = i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n-1},$$

他和函數 $\sigma(u)$ 之間的關係是：

(93) $$\sigma(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} C\vartheta_1(v)。$$

現在要決定常數 C。因 $u=2\omega v$，由(93)式知 $\vartheta_1(0)=0$，又比值 $\frac{\vartheta_1(v)}{v}$ 當 $v=0$ 時等於 $\vartheta_1'(0)$，故以 u 除(93)式兩邊，然後置 $u=0$，得

$$1 = \frac{1}{2\omega} C\vartheta_1'(0),$$

從而

(94) $$\sigma(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{2\omega}{\vartheta_1'(0)} \vartheta_1(v)。$$

現在將 $\vartheta_1(v)$ 的冪級數(92)改寫爲三角級數。爲此，我們必需將(92)中含 z 的冪次絕對值相同而符號相反的每兩項相加在一起。以 ν 記正的奇數，$\nu=2n-1$ $(n=1, 2, \cdots)$，從而 $n=\frac{\nu+1}{2}$。又當 $n=0, -1, -2, \cdots$ 時，置 $\nu=-2n+1$，從而 $n=\frac{-\nu+1}{2}$，於是可寫

$$\vartheta_1(v) = i\left[\sum_{\nu}^{1,3,5,\cdots} (-1)^{\frac{\nu+1}{2}} h^{\frac{\nu^2}{4}} z^{\nu} + \sum_{\nu}^{1,3,5,\cdots} (-1)^{\frac{-\nu+1}{2}} h^{\frac{\nu^2}{4}} z^{-\nu}\right],$$

其中每一級數關於正奇數 $\nu=1,3,5,\cdots$ 相加。因

$$(-1)^{\frac{\nu+1}{2}}=(-1)^{\nu}(-1)^{\frac{-\nu+1}{2}}=-(-1)^{\frac{-\nu+1}{2}}=-(-1)^{\frac{\nu-1}{2}},$$

及
$$z^{\nu}-z^{-\nu}=e^{i\nu\pi v}-e^{-i\nu\pi v}=2i\sin\nu\pi v$$

上式可以改寫為：

$$\vartheta_1(v)=i\sum_{\nu}^{1,3,5,\cdots}(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}h^{\frac{\nu^2}{4}}(z^{-\nu}-z^{\nu}),$$

或

(95)
$$\vartheta_1(v)=2\sum_{\nu}^{1,3,5,\cdots}(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}h^{\frac{\nu^2}{4}}\sin\nu\pi v=$$
$$=2[h^{\frac{1}{4}}\sin\pi v-h^{\frac{9}{4}}\sin 3\pi v+h^{\frac{25}{4}}\sin 5\pi v-\cdots]。$$

函數 $\vartheta_1(v)$，通常稱為第一個 ϑ 函數，是 v 的奇整函數。在作這函數的時候我們祗用到一個複數 τ，由假設 τ 應該在上半平面中，即有正的虛數部分，而 $h=e^{i\pi\tau}$。因此 ϑ 函數有時也記作 $\vartheta_1(v;\tau)$。

176. 函數 $\vartheta_k(v)$　和函數 $\sigma(u)$ 一起我們曾經導出其他三個整函數 $\sigma_k(u)$。因此和函數 $\vartheta_1(v)$ 一起也自然就有另外三個 ϑ 函數。

在新的記號之下，

$$\sigma_3(u)=e^{\eta' u}\frac{\sigma(\omega'-u)}{\sigma(\omega')},$$

由(93)有

$$\sigma_3(u)=\frac{C}{\sigma(\omega')}e^{\eta' u+\frac{\eta(\omega'-u)^2}{2\omega}}\vartheta_1\left(\frac{\omega'-u}{2\omega}\right)。$$

展開指數冪中的括弧，改 $\frac{u}{2\omega}$ 為 v，$\frac{\omega'}{\omega}$ 為 τ，得

$$\sigma_3(u)=C_3e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}e^{(\eta'\omega-\eta\omega')\frac{u}{\omega}}\vartheta_1\left(\frac{\tau}{2}-v\right),$$

其中 C_3 是個新的常數。最後，利用關係式(83)，即得函數 $\sigma_3(u)$ 和第一個 ϑ 函數間的關係：

(96)
$$\sigma_3(u)=C_3e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}z^{-1}\vartheta_1\left(\frac{\tau}{2}-v\right)。$$

完全類似的對於 $\sigma_2(u)$ 有：

$$\sigma_2(u)=e^{\tilde{\eta} u}\frac{\sigma(\tilde{\omega}-u)}{\sigma(\tilde{\omega})},$$

其中
$$\tilde{\eta}=\eta+\eta'; \quad \tilde{\omega}=\omega+\omega'。$$

由(93)有

$$\sigma_2(u)=\frac{C}{\sigma(\tilde{\omega})}e^{\tilde{\eta} u+\eta\frac{(\tilde{\omega}-u)^2}{2\omega}}\vartheta_1\left(\frac{\tilde{\omega}-u}{2\omega}\right),$$

經過和前面一樣的計算最後得到：

(97)
$$\sigma_2(u)=C_2e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}z^{-1}\vartheta_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}-v\right)。$$

同樣可得

(98)
$$\sigma_1(u)=C_1e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\vartheta_1\left(\frac{1}{2}-v\right)。$$

現在再求函數 $\sigma_k(u)$ 的表示式中 ϑ 函數的冪級數展開式。我們有

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2}-v\right)=-\vartheta_1\left(v-\frac{1}{2}\right)。$$

但由(81)知道從 v 減去 $\frac{1}{2}$ 相當於用 $(-i)$ 乘 z，因此由(92)式得：

(99)
$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2}-v\right)=-i\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}(-iz)^{2n-1}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}z^{2n-1}。$$

同樣
$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}-v\right)=-\vartheta_1\left(v-\frac{1}{2}-\frac{\tau}{2}\right),$$

從 v 減去 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)$ 相當於用 $-i\cdot h^{-\frac{1}{2}}$ 乘 z。由是

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}-v\right)=-i\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\left(-ih^{-\frac{1}{2}}z\right)^{2n-1}=$$

$$=h^{-\frac{1}{4}}z\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h^{(n-1)^2}z^{2n-2}$$

或改級數中的 n 為 $n+1$，得

(100) $$\vartheta_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}-v\right)=h^{-\frac{1}{4}}z\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h^{n^2}z^{2n},$$

同樣

(101) $$\vartheta_1\left(\frac{\tau}{2}-v\right)=h^{-\frac{1}{4}}iz\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h^{n^2}z^{2n}。$$

導入三個新的 ϑ 函數

(102) $$\begin{cases}\vartheta_2(v)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}z^{2n-1},\\ \vartheta_3(v)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}h^{n^2}z^{2n},\\ \vartheta_4(v)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h^{n^2}z^{2n}。\end{cases}$$

這時以前關於 $\sigma_k(u)$ 的公式可以改寫爲

$$\sigma_1(u)=C_1e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\vartheta_2(v);\quad \sigma_2(u)=\widetilde{C}_2e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\vartheta_3(v);\quad \sigma_3(u)=\widetilde{C}_3e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\vartheta_4(v),$$

其中 $\widetilde{C}_2$ 和 $\widetilde{C}_3$ 是新的常數。要決定這些常數可置 $v=0$。這時 $u=0$，$\sigma_k(0)=1$，從而

$$C_1=\frac{1}{\vartheta_2(0)};\quad \widetilde{C}_2=\frac{1}{\vartheta_3(0)};\quad \widetilde{C}_3=\frac{1}{\vartheta_4(0)},$$

代入前式，得

(103) $$\sigma_1(u)=e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)};\quad \sigma_2(u)=e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)};\quad \sigma_3(u)=e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\frac{\vartheta_4(v)}{\vartheta_4(0)},$$

有時也將 $\vartheta_4(v)$ 寫成 $\vartheta_0(v)$。

(102)式中諸 ϑ 函數的冪級數展開式很容易改寫成三角級數，好像以前對函數 $\vartheta_1(v)$ 做了的一樣。我們有：

(104) $$\begin{cases}\vartheta_2(v)=2h^{\frac{1}{4}}\cos\pi v+2h^{\frac{9}{4}}\cos 3\pi v+2h^{\frac{25}{4}}\cos 5\pi v+\cdots\\ \vartheta_3(v)=1+2h\cos 2\pi v+2h^4\cos 4\pi v+2h^9\cos 6\pi v+\cdots\\ \vartheta_4(v)=1-2h\cos 2\pi v+2h^4\cos 4\pi v-2h^9\cos 6\pi v+\cdots\end{cases}$$

以後爲書寫簡便起見我們將簡記 $\vartheta_k'(0)$ 爲 ϑ_k'，$\vartheta_k(0)$ 爲 ϑ_k。由(95)和(104)可得下列展開式：

$$(105)\qquad \begin{cases} \vartheta_1' = 2\pi(h^{\frac{1}{4}} - 3h^{\frac{9}{4}} + 5h^{\frac{25}{4}} - 7h^{\frac{49}{4}} + \cdots) \\ \vartheta_2 = 2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + 2h^{\frac{25}{4}} + 2h^{\frac{49}{4}} + \cdots \\ \vartheta_3 = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots \\ \vartheta_4 = 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \cdots \end{cases}$$

這些級數收斂得很快，因爲由假設 $|h|<1$。級數的和是上半平面中 τ 的正則函數。

現在不難求出維爾史特拉斯函數 $\wp(u)$ 和 ϑ 函數間的關係了。我們從前有

$$\sqrt{\wp(u)-e_k} = \frac{\sigma_k(u)}{\sigma(u)},$$

將 $\sigma(u)$ 與 $\sigma_k(u)$ 的通過 ϑ 函數的表示式代入，得

$$(106)\qquad \sqrt{\wp(u)-e_k} = \frac{1}{2\omega}\,\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_{k+1}}\,\frac{\vartheta_{k+1}(v)}{\vartheta_1(v)}。$$

177. ϑ 函數的性質 所有的 ϑ 函數都是 v 的整函數，建造 ϑ 函數的基本元素是個上半平面中的複數 τ。爲了表示後一事實，有時也記 ϑ 函數爲 $\vartheta_k(v;\tau)$。在這些函數之中 $\vartheta_1(v)$ 是奇函數，而其餘的是偶函數。現在要看當 v 得到改變量 $\frac{1}{2}$ 時 ϑ 函數如何改變。利用 ϑ 函數的三角級數展開式和三角函數的性質容易得到

$$\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right) = \vartheta_2(v);\quad \vartheta_2\left(v+\frac{1}{2}\right) = -\vartheta_1(v)$$

$$\vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}\right) = \vartheta_4(v);\quad \vartheta_4\left(v+\frac{1}{2}\right) = \vartheta_3(v)。$$

再看當 v 得到改變量 $\frac{\tau}{2}$ 時 ϑ 函數如何改變。如我們所知，這就相當於用 $h^{\frac{1}{2}}$ 乘 z。利用 ϑ 函數的冪級數表示式，例如由(92)有

$$\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = i\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} h^{\frac{2n-1}{2}} z^{2n-1} =$$

$$= ih^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h^{n^2} z^{2n},$$

或由(102)

$$\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=im\vartheta_4(v),$$

其中

$$m=h^{-\frac{1}{4}}z^{-1}=h^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}, \tag{107}$$

同樣可以證明

$$\vartheta_2\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=m\vartheta_3(v);\quad \vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=m\vartheta_2(v);\quad \vartheta_4\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=im\vartheta_1(v)。$$

由此可得更一般的變換公式。例如

$$\vartheta_1(v+\tau)=\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=ih^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)}\vartheta_4\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=$$

$$=ih^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)}ih^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\vartheta_1(v)=-l\vartheta_1(v),$$

其中

$$l=h^{-1}z^{-2}。 \tag{108}$$

以上這些結果可以歸納成下面的一張表:

(109)

	$v+\frac{1}{2}$	$v+\frac{\tau}{2}$	$v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$	$v+1$	$v+\tau$	$v+1+\tau$
ϑ_1	ϑ_2	$im\,\vartheta_4$	$m\,\vartheta_3$	$-\vartheta_1$	$-l\,\vartheta_1$	$l\,\vartheta_1$
ϑ_2	$-\vartheta_1$	$m\,\vartheta_3$	$-im\,\vartheta_4$	$-\vartheta_2$	$l\,\vartheta_2$	$-l\,\vartheta_2$
ϑ_3	ϑ_4	$m\,\vartheta_2$	$im\,\vartheta_1$	ϑ_3	$l\,\vartheta_3$	$l\,\vartheta_3$
ϑ_4	ϑ_3	$im\,\vartheta_1$	$m\,\vartheta_2$	ϑ_4	$-l\,\vartheta_4$	$-l\,\vartheta_4$

舉一個例子,如果我們想將 $\vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)$ 表示爲以 v 做變數的 ϑ 函數,可以在第一行中找 ϑ_3,然後再找與 ϑ_3 同一列而在 $v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$ 之下的函數,即得

$$\vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=im\vartheta_1(v)。$$

下面還要給一張 ϑ 函數的零點的表。函數 $\vartheta_1(v)$ 和函數 $\sigma(u)$ 只差一個指數型的因子,這因子永不爲零,因此當且僅當 $\sigma(u)$ 等於零時

$\vartheta_1(v)$ 才等於零，$\sigma(u)$ 的零點是

$$u=n2\omega+n'2\omega',$$

其中 n 和 n' 爲任意整數。以 2ω 除之，得到函數 $\vartheta_1(v)$ 的零點的表示式：

$$v=n+n'\tau。$$

其餘諸 ϑ 函數的零點可以利用(109)表的第一列而求得。例如，$\vartheta_3(v)=m^{-1}\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)$，因此 $\vartheta_3(v)$ 的零點可由條件

$$v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}=n+n'\tau$$

決定，因爲 $m^{-1}=h^{\frac{1}{4}}e^{i\pi v}$ 不等於零之故。上式卽

$$v=\left(n-\frac{1}{2}\right)+\left(n'-\frac{1}{2}\right)\tau,$$

其中 n 和 n' 是任意整數。這樣，我們就得到下面的表：

(110)

	v
ϑ_1	$n+n'\tau$
ϑ_2	$n+n'\tau+\frac{1}{2}$
ϑ_3	$n+n'\tau+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$
ϑ_4	$n+n'\tau+\frac{\tau}{2}$

還要注意：由(109)表的第五列立刻知道函數 ϑ_3 和 ϑ_4 的週期爲 1，而函數 ϑ_1 和 ϑ_2 的週期爲 2。(110)表則說明各個 ϑ 函數間沒有相同的零點。

我們可以把 ϑ 函數看做是兩個變數 v 和 τ 的函數。對任一已給上半平面中的 τ 他們是 v 的整函數，對於任一已給的 v 他們是上半平面中 τ 的正則函數。後一事實是由於級數(92)和(102)當 $|h|<\rho<1$ 時爲一致收斂的緣故。現在證明：作爲兩個變數 v 和 τ 的函數看待，四個 ϑ 函數都滿足同一個二階線性微分方程：

(111) $$\frac{\partial^2\vartheta_k(v)}{\partial v^2}=4\pi i\frac{\partial\vartheta_k(v)}{\partial\tau}。$$

這方程和我們在[II, 203]中所說過的熱傳導方程形式相類似。試以 $\vartheta_3(v)$ 爲例，證明他滿足方程(111)。將(104)式中 $\vartheta_3(v)$ 的級數的一般項 $2h^{n^2}\cos 2n\pi v=2e^{i\pi\tau n^2}\cos 2n\pi v$ 關於 v 微分兩次，得

$$-8n^2\pi^2e^{i\pi\tau n^2}\cos 2n\pi v,$$

將這一般項關於 τ 微分一次，再乘 $4\pi i$，也得到

$$4\pi i(2in^2\pi e^{i\pi\tau n^2}\cos 2n\pi v)=-8n^2\pi^2e^{i\pi\tau n^2}\cos 2n\pi v。$$

同樣可證其餘三個 ϑ 函數也滿足這方程。

178. 用 ϑ_s 表示 e_k　我們在研究維爾史特拉斯函數時曾導入三個數 e_k $(k=1,2,3)$。在新的記號之下，他們可由下列式子定義：

(112) $$e_1=\wp(\omega);\quad e_2=\wp(\omega+\omega');\quad e_3=\wp(\omega'),$$

而函數 $\wp(u)$ 則滿足基本關係式

(113) $$\wp'^2(u)=4[\wp(u)-e_1][\wp(u)-e_2][\wp(u)-e_3]。$$

如我們所知，e_k 滿足條件

(114) $$e_1+e_2+e_3=0$$

並且互不相等。這些數字在 $\wp(u)$ 函數的理論中有基本的重要性。他們可以用來替代 2ω 和 $2\omega'$ 作爲建造 $\wp(u)$ 的基礎。這時函數 $\wp(u)$ 可以定義做第一類橢圓積分

(115) $$u=\int_\infty^x\frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

的反演。

現在要用 ϑ 函數在 $v=0$ 的諸值 ϑ_s 來表示 e_k。由(106)式

$$\sqrt{\wp(u)-e_k}=\frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_{k+1}}\frac{\vartheta_{k+1}(v)}{\vartheta_1(v)}\qquad\left(v=\frac{u}{2\omega}\right)$$

在這式子中依次置 $u=\omega$ 和 $u=\omega+\omega'$，即 $v=\frac{1}{2}$ 和 $v=\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$，由(112)式可得：

$$\sqrt{e_1-e_k}=\frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_{k+1}}\frac{\vartheta_{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\right)};$$

$$\sqrt{e_3-e_k}=\frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_{k+1}}\frac{\vartheta_{k+1}\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)}。$$

應用(109)中的表簡化上列二式，可得

$$\sqrt{e_1-e_2}=\frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}$$

$$\sqrt{e_1-e_3}=\frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_4}\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}$$

$$\sqrt{e_2-e_3}=\frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_4}\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}。$$

其次，再證明下面的重要恆等式

$$\vartheta_1'=\pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4, \tag{116}$$

利用這式子可以把前面的三個式子改寫成非常簡單的形式：

$$\sqrt{e_1-e_2}=\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_4^2;\quad \sqrt{e_1-e_3}=\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2;\quad \sqrt{e_2-e_3}=\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_2^2。 \tag{117}$$

現在先證明(116)式。由(106)式有

$$\sqrt{\wp(2\omega v)-e_k}=\frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_{k+1}}\frac{\vartheta_{k+1}(v)}{\vartheta_1(v)},$$

由此將 $\vartheta_1(v)$ 和 $\vartheta_{k+1}(v)$ 展開成麥克勞臨級數，並注意 $\vartheta_1(v)$ 是奇函數而其餘的 ϑ 函數是偶函數，卽得

$$\sqrt{\wp(2\omega v)-e_k}=\frac{1}{2\omega}\frac{1+\frac{\vartheta_{k+1}''}{\vartheta_{k+1}}\frac{v^2}{2}+\cdots}{v+\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\frac{v^3}{6}+\cdots}$$

或從分母中分出一個因子 v，然後再求出兩級數的商，卽得

$$\sqrt{\wp(2\omega v)-e_k}=\frac{1}{2\omega v}\left[1+\left(\frac{\vartheta_{k+1}''}{\vartheta_{k+1}}-\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)\frac{v^2}{2}+\cdots\right]$$

或 $$\wp(2\omega v)-e_k=\frac{1}{4\omega^2v^2}\left[1+\left(\frac{\vartheta''_{k+1}}{\vartheta_{k+1}}-\frac{1}{3}\frac{\vartheta'''_1}{\vartheta'_1}\right)\frac{v^2}{2}+\cdots\right]^2。$$

如我們所知，$\wp(u)$ 在 $u=0$ 的鄰近的展開式中不含常數項，因此將上式右邊級數的平方算出來，將常數項集在一起，其值應等於$(-e_k)$，卽

$$e_k=\frac{1}{4\omega^2}\left(\frac{1}{3}\frac{\vartheta'''_1}{\vartheta'_1}-\frac{\vartheta''_{k+1}}{\vartheta_{k+1}}\right)。\tag{118}$$

由此再用(114)的關係，卽得

$$\frac{\vartheta'''_1}{\vartheta'_1}=\frac{\vartheta''_2}{\vartheta_2}+\frac{\vartheta''_3}{\vartheta_3}+\frac{\vartheta''_4}{\vartheta_4}。\tag{119}$$

在所有以上各式中 ϑ 右上角的小撇表示關於變數 v 的導數，例如，ϑ'''_1 是 $\frac{\partial^3\vartheta_1(v)}{\partial v^3}$ 當 $v=0$ 時的數值。於(111)式中置 $v=0$，得

$$\vartheta''_k=4\pi i\frac{\partial\vartheta_k}{\partial\tau}\qquad (k=2,\ 3,\ 4)$$

同様，在方程(111)中置 $k=1$，關於 v 微分，然後再令 $v=0$，卽得

$$\vartheta'''_1=4\pi i\frac{\partial\vartheta'_1}{\partial\tau}。$$

利用上面兩個關係式我們可以把(119)式改寫爲

$$\frac{1}{\vartheta'_1}\frac{\partial\vartheta'_1}{\partial\tau}=\frac{1}{\vartheta_2}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\tau}+\frac{1}{\vartheta_3}\frac{\partial\vartheta_3}{\partial\tau}+\frac{1}{\vartheta_4}\frac{\partial\vartheta_4}{\partial\tau}。$$

關於 τ 積分，卽得

$$\vartheta'_1=C\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4,$$

其中 C 是常數，他和 τ 無關，卽和 h 無關。要決定這常數可以把(105)中諸展開式代入上面的恆等式，我們祇寫出這些展開式的第一項：

$$2\pi(h^{\frac{1}{4}}-\cdots)=C(2h^{\frac{1}{4}}+\cdots)(1+\cdots)(1-\cdots)。$$

比較含 $h^{\frac{1}{4}}$ 的最低次項的係數，得 $C=\pi$，因此就證明了恆等式(116)。

179. 夏可皮的橢圓函數 代替維爾史特拉斯的橢圓函數 $\wp(u)$ 我們有時也用另外一種橢圓函數，他們是在維爾史特拉斯以前就被夏可

皮所發現了的。如常，假設 τ 是上半平面中的任一複數，ω 和 ω' 是兩個數，他們的比 $\frac{\omega'}{\omega}=\tau$。應用這些元素我們可以造出 ϑ 函數來。現在定義三個新的函數，每一個都是兩個整函數的商，就是說，他們都是分函數：

$$(120)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u)=\dfrac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}=2\omega\dfrac{\vartheta_4}{\vartheta_1'}\dfrac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)} \\ \operatorname{cn}(u)=\dfrac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}=\dfrac{\vartheta_4}{\vartheta_2}\dfrac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)} \\ \operatorname{dn}(u)=\dfrac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}=\dfrac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\dfrac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)}。 \end{cases}\qquad \left(v=\frac{u}{2\omega}\right)$$

由已知的公式

$$\sqrt{\wp(u)-e_k}=\frac{\sigma_k(u)}{\sigma(u)},$$

可知這些新的函數和維爾史特拉斯函數 $\wp(u)$ 之間存在下列三個關係式：

(121)

$$\sqrt{\wp(u)-e_3}=\frac{1}{\operatorname{sn}(u)};\quad \sqrt{\wp(u)-e_1}=\frac{\operatorname{cn}(u)}{\operatorname{sn}(u)};\quad \sqrt{\wp(u)-e_2}=\frac{\operatorname{dn}(u)}{\operatorname{sn}(u)}。$$

從這式關係式中消去函數 $\wp(u)$，可得兩個存在於三個新的函數之間的關係：

$$(122)\quad \operatorname{cn}^2(u)+(e_1-e_3)\operatorname{sn}^2(u)=1;\quad \operatorname{dn}^2(u)+(e_2-e_3)\operatorname{sn}^2(u)=1。$$

由上一段中的(117)式知

$$(123)\quad e_1-e_2=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\vartheta_4^4;\quad e_1-e_3=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\vartheta_3^4;\quad e_2-e_3=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\vartheta_2^4。$$

直到現在複數 ω 和 ω' 仍是完全任意的，祇要他們的比 $\frac{\omega'}{\omega}=\tau$ 在上半平面中就好了。在維爾史特拉斯函數的理論中這些數字不再受其他限制。但在夏可皮函數的理論中對於已給的 τ 還要求 ω 由 $e_1-e_3=1$ 這個條件來決定。這時由(123)的第二個關係式得：

$$\omega=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2=\frac{\pi}{2}(1+2h+2h^4+2h^9+\cdots)^2, \qquad (h=e^{i\pi\tau}) \tag{124}$$

當 τ 已定時 ω 可由這式子完全決定，然後 ω' 又可由 $\omega'=\omega\tau$ 來決定。將(124)式代入(123)的各式中，得到

$$e_1-e_2=\frac{\vartheta_4^4}{\vartheta_3^4}; \quad e_1-e_3=1; \quad e_2-e_3=\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}, \tag{125}$$

各式右邊祇和 τ 有關係。這時(122)的兩式可以改寫如下：

$$\mathrm{sn}^2(u)+\mathrm{cn}^2(u)=1; \quad \mathrm{dn}^2(u)+k^2\mathrm{sn}^2(u)=1, \tag{126}$$

其中簡記

$$k^2=\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}。 \tag{127}$$

夏可皮函數係由一個數 τ 出發而造成的，所以有時也用下面的記號：

$$\mathrm{sn}(u;\tau); \quad \mathrm{cn}(u;\tau); \quad \mathrm{dn}(u;\tau)。$$

由(127)式定義的 k 稱為夏可皮函數的模數。而由

$$k'^2=\frac{\vartheta_4^4}{\vartheta_3^4} \tag{128}$$

所決定的 k' 則稱為補模數。

將(125)中的第一和第三式相加，得

$$k^2+k'^2=1。 \tag{129}$$

(127)和(128)兩式定義 k^2 和 k'^2 為某些 τ 的單值函數的完全平方，取一定的開方的值，我們可以規定 k 和 k' 的值為：

$$k=\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}; \quad k'=\frac{\vartheta_4^2}{\vartheta_3^2}。 \tag{130}$$

回到(120)式。我們可以將等式右邊各個與 v 無關的因子用 k 和 k' 來表示。實際上，由(130)式有

$$\sqrt{k}=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}; \quad \sqrt{k'}=\frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}; \quad \sqrt{\frac{k'}{k}}=\frac{\vartheta_4}{\vartheta_2},$$

由上列第一式，(124)和(116)式得

$$2\omega\frac{\vartheta_4}{\vartheta_1'}=\pi\vartheta_3^2\frac{\vartheta_4}{\vartheta_1'}=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}=\frac{1}{\sqrt{k}},$$

從而(120)的三個式子可以改寫如下：

$$(131)\quad \mathrm{sn}(u)=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)};\quad \mathrm{cn}(u)=\sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)};\quad \mathrm{dn}(u)=\sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)}$$

$$\left(v=\frac{u}{2\omega}\right)$$

180. 夏可皮函數的基本性質 (131)式將夏可皮函數表示爲兩個整函數的商。因爲 $\vartheta_1(v)$ 是奇函數，而其餘諸 $\vartheta_k(v)$ 是偶函數，所以知道 sn(u) 是奇函數，而 cn(u) 和 dn(u) 是偶函數。

此外，$\vartheta_1(0)=0$，又

$$\left.\frac{\vartheta_1(v)}{u}\right|_{v=0}=\left.\frac{\vartheta_1(v)}{2\omega v}\right|_{v=0}=\frac{1}{2\omega}\vartheta_1',$$

故由(120)式得

$$(132)\qquad \left.\frac{\mathrm{sn}(u)}{u}\right|_{u=0}=1;\quad \mathrm{cn}(0)=\mathrm{dn}(0)=1。$$

現在回到 ϑ 函數的簡化公式表(109)。記住 v 得到改變量 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{\tau}{2}$ 時 u 得到改變量 ω 或 ω'，再利用(131)中諸基本關係式，可得下面的夏可皮函數的簡化公式表：

(133)

	$u+\omega$	$u+\omega'$	$u+\omega+\omega'$	$u+2\omega$	$u+2\omega'$	$u+2\omega+2\omega'$
sn	$\frac{\mathrm{cn}(u)}{\mathrm{dn}(u)}$	$\frac{1}{k}\frac{1}{\mathrm{sn}(u)}$	$\frac{1}{k}\frac{\mathrm{dn}(u)}{\mathrm{cn}(u)}$	$-\mathrm{sn}(u)$	$\mathrm{sn}(u)$	$-\mathrm{sn}(u)$
cn	$-k'\frac{\mathrm{sn}(u)}{\mathrm{dn}(u)}$	$-\frac{i}{k}\frac{\mathrm{dn}(u)}{\mathrm{sn}(u)}$	$-i\frac{k'}{k}\frac{1}{\mathrm{cn}(u)}$	$-\mathrm{cn}(u)$	$-\mathrm{cn}(u)$	$\mathrm{cn}(u)$
dn	$k'\frac{1}{\mathrm{dn}(u)}$	$-i\frac{\mathrm{cn}(u)}{\mathrm{sn}(u)}$	$ik'\frac{\mathrm{sn}(u)}{\mathrm{cn}(u)}$	$\mathrm{dn}(u)$	$-\mathrm{dn}(u)$	$-\mathrm{dn}(u)$

上表的最後三列說明函數 sn(u) 以 4ω 和 $2\omega'$ 爲週期，函數 cn(u) 以 4ω 和 $2\omega+2\omega'$ 爲週期，函數 dn(u) 以 2ω 和 $4\omega'$ 爲週期。

由決定 ϑ 函數的零點的(110)表可以導出決定夏可皮函數的零點

和極點的表來。把各函數的週期也寫在內，我們得到下面的表格：

(134)

	零 點	極 點	週 期
$\mathrm{sn}(u)$	$2n\omega+2n'\omega'$	$2n\omega+(2n'+1)\omega'$	4ω 和 $2\omega'$
$\mathrm{cn}(u)$	$(2n+1)\omega+2n'\omega'$	$2n\omega+(2n'+1)\omega'$	4ω 和 $2\omega+2\omega'$
$\mathrm{dn}(u)$	$(2n+1)\omega+(2n'+1)\omega'$	$2n\omega+(2n'+1)\omega'$	2ω 和 $4\omega'$

圖 84 中畫出這三個函數的週期平行四邊形，其中小的圓圈表示零點，小的 × 號表示極點。因爲 ϑ 函數和函數 $\sigma(u)$ 都祇有單極點，所以夏可皮函數也祇有單極點。在下圖每一個平行四邊形中有兩個極點，這說明所有三個夏可皮函數都是具有單極點的二階橢圓函數。這和下面的事實有密切的關係，卽所有這些函數都可以由第一類的橢圓積分反演而得到，這些橢圓積分的根號內含的是四次多項式。我們下面就要說明其理由。

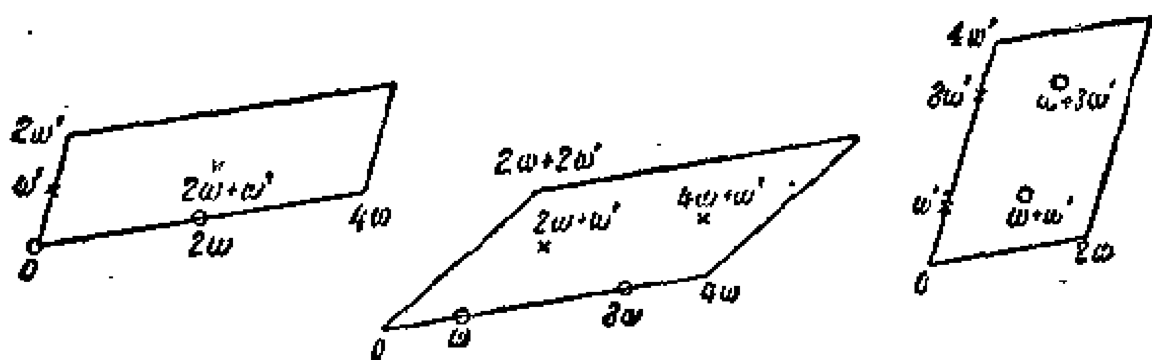


圖 84

181. 夏可皮函數所滿足的微分方程 由 (113) 和 (121) 兩式立刻可以得到

$$\wp'(u)=\pm\frac{2\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)}{\mathrm{sn}^3(u)}。$$

要決定等式右邊的符號可以用 u^3 乘等式的兩邊，然後置 $u=0$。記住當 $u=0$ 時 $u^3\wp'(u)=-2$，再利用 (132) 的兩式，可以知道在上面的式子的右邊我們應當取負號。當函數被解析延拓時這符號顯然不變，卽有

$$\wp'(u)=-\frac{2\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)}{\mathrm{sn}^3(u)}。$$

另一方面，微分關係式

$$\wp(u)-e_3=\frac{1}{\mathrm{sn}^2(u)},$$

得到
$$\wp'(u)=-\frac{2[\mathrm{sn}(u)]'}{\mathrm{sn}^3(u)},$$

比較這兩個式子，得

(135) $$[\mathrm{sn}(u)]'=\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)。$$

再微分(126)中兩恆等式，利用(135)的結果，可得另外兩個夏可皮函數的微分公式：

(136) $$[\mathrm{cn}(u)]'=-\mathrm{sn}(u)\mathrm{dn}(u);\quad [\mathrm{dn}(u)]'=-k^2\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(u)。$$

把這些式子平方，利用(126)式就可以得到夏可皮函數所滿足的微分方程：

(137) $$\begin{cases}\left(\dfrac{d\,\mathrm{sn}(u)}{du}\right)^2=[1-\mathrm{sn}^2(u)][1-k^2\mathrm{sn}^2(u)]\\[2ex] \left(\dfrac{d\,\mathrm{cn}(u)}{du}\right)^2=[1-\mathrm{cn}^2(u)][k'^2+k^2\mathrm{cn}^2(u)]\\[2ex] \left(\dfrac{d\,\mathrm{dn}(u)}{du}\right)^2=-[1-\mathrm{dn}^2(u)][k'^2-\mathrm{dn}^2(u)]。\end{cases}$$

再深入研究一下函數 $\mathrm{sn}(u)$ 所滿足的微分方程。置 $x=\mathrm{sn}(u)$，這方程可以改寫爲

$$\frac{dx}{du}=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

其中當 $u=0$ 時應有 $x=0$，且這時等式右邊的根數應等於 1，因爲由(132)式 $\mathrm{sn}'(0)=1$ 的緣故。分離變數，然後積分，即得

(138) $$u=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}。$$

由此可見，函數 $\mathrm{sn}(u)$ 可以由一個勒上特形式的第一類橢圓積分反演而得到。反過來，可以證明：對於任一已給的複數 k^2，不等於 0 和

1，將積分(138)反演的結果得到的是夏可皮函數 $\mathrm{sn}(u)$。這樣，就可以用 k 來替代 τ 作為建造夏可皮函數的元素。當 k^2 取 0 和 1 之間的實數數值的特別情形，我們曾以保角變換的觀點詳細研究過積分(138)。這時函數有一個實週期和一個純虛數的週期，我們分別以 $4K$ 和 $2iK'$ 記之[167]。和現在的記號比較，即得：

$$K=\omega=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2;\quad iK'=\omega'=\omega\tau=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2\tau。$$

182. 加法公式　考察變數 u 的三個函數：$\varphi_1(u)=\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(u+v)$；$\varphi_2(u)=\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(u+v)$；$\varphi_3(u)=\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(u+v)$，其中 v 為任意定數。利用(133)表不難證明所有這些函數都以 2ω 和 $2\omega'$ 為週期。在 $\mathrm{sn}(u)$ 或 $\mathrm{sn}(u+v)$ 的極點函數 $\varphi_1(u)$ 有單極點。利用(134)表知道這些極點就是和 ω' 或 $-v+\omega'$ 相差為週期的點，即相差形式為 $n2\omega+n'2\omega'$ 的點，其中 n 和 n' 是任意整數。在以向量 2ω 和 $2\omega'$ 為邊所作的基本週期平行四邊形中，這種點當然祇有兩個。對於其他兩函數 $\varphi_k(u)$ 也有同樣的結果，這說明所有三個函數都是以 2ω 和 $2\omega'$ 為週期的二階橢圓函數，他們在週期平行四邊形中各有兩個單極點，其中一個是 ω'。可以適當選取常數 A 和 B，使得下列兩函數

$$\varphi_2(u)+A\varphi_1(u)\ \text{和}\ \varphi_3(u)+B\varphi_1(u) \tag{139}$$

不以 $u=\omega'$ 為極點。對於如此選取的常數 A 和 B，(139)中每一函數在週期平行四邊形內將祇有一個一階極點，因此他們必定都等於常數，因為不存在一階橢圓函數的緣故[168]。這樣，我們可以知道：當選定常數 A 和 B 時下列兩關係式成立：

$$\begin{cases}\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(u+v)+A\,\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(u+v)=A_1\\ \mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(u+v)+B\,\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(u+v)=B_1。\end{cases} \tag{140}$$

A，B，A_1 和 B_1 對於變數 u 而言是常數，但他們的數值卻和 v 的選取有關。現在我們來決定這些常數。於(140)式中置 $u=0$，立刻得到

$$A_1=\mathrm{cn}(v);\quad B_1=\mathrm{dn}(v)。$$

關於 u 微分(140)式,然後再令 $u=0$, 則由(135),(136)和(132)知有:

$$\begin{cases} [\mathrm{cn}(v)]'+A\,\mathrm{sn}(v)=0 \\ [\mathrm{dn}(v)]'+B\,\mathrm{sn}(v)=0 \end{cases}$$

再用(136)式,即得

$$A=\mathrm{dn}(v), \quad B=k^2\mathrm{cn}(v)。$$

將這些常數的數值代入(140)中,最後得到下列兩關係式:

$$(141)\quad \begin{cases} \mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(u+v)+\mathrm{dn}(v)\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(u+v)\quad=\mathrm{cn}(v) \\ \mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(u+v)+k^2\mathrm{cn}(v)\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(u+v)=\mathrm{dn}(v), \end{cases}$$

這兩式可以看作關於 u 和 v 的恆等式。改 u 爲 $(-u)$, v 爲 $(v+u)$, 則得

$$\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(v)-\mathrm{dn}(u+v)\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(v)\quad=\mathrm{cn}(u+v)$$
$$\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(v)-k^2\mathrm{cn}(u+v)\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(v)=\mathrm{dn}(u+v)。$$

由上二式可以求 $\mathrm{cn}(u+v)$ 和 $\mathrm{dn}(u+v)$。代入(141)的第一式可以求得 $\mathrm{sn}(u+v)$。這樣,我們就得到下列三個加法公式,他們把兩個變數 u 與 v 之和的夏可皮函數用每一變數的夏可皮函數表示出來:

$$(142)\quad \begin{cases} \mathrm{sn}(u+v)=\dfrac{\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(v)\mathrm{dn}(v)+\mathrm{sn}(v)\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)} \\ \mathrm{cn}(u+v)=\dfrac{\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(v)-\mathrm{sn}(u)\mathrm{dn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{dn}(v)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)} \\ \mathrm{dn}(u+v)=\dfrac{\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(v)-k^2\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{cn}(v)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)}。 \end{cases}$$

前兩式和通常三角函數的加法公式相類似,即正弦函數和餘弦函數的加法公式。後者實際上就是 $k=0$ 時的夏可皮函數。因爲若在積分(138)中令 $k=0$, 那末他的反演就是 $x=\sin u$。而由(126)和(132)可知這時 $\mathrm{cn}(u)$ 變爲 $\cos u$。最後,(126)的第二式說明當 $k=0$ 時函數 $\mathrm{dn}(u)$ 恆等於 1, 因此沒有和他相當的三角函數。

183. 函數 $\wp(u)$ 和 $\mathrm{sn}(u)$ 之間的關係 現在決定橢圓函數 $\wp(u)$

和 $\mathrm{sn}(u)$ 之間的關係。取一個以 2ω 和 $2\omega'$ 爲週期的函數 $\wp(u)$。利用上半平面中的複數 $\tau=\frac{\omega'}{\omega}$ 作出 ϑ 函數，再由(130)和(131)兩式作函數 $\mathrm{sn}(u)$。一般而論，上述維爾史特拉斯函數的週期 2ω 和 $2\omega'$ 不一定滿足條件 $e_1-e_3=1$。由上列公式可得下面一些關係式(117)：

$$(143)\qquad \begin{cases} e_1-e_2=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\vartheta_4^4; & e_1-e_3=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\vartheta_3^4; \\ e_2-e_3=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\vartheta_2^4; & k^2=\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}。\end{cases}$$

對於函數 $\mathrm{sn}(u)$，代替 2ω 和 $2\omega'$ 應有新的數 $2\tilde{\omega}$ 和 $2\tilde{\omega}'$，如我們所知，他們是由下列條件所決定：

$$(144)\qquad 2\tilde{\omega}=\pi\vartheta_3^2;\quad 2\tilde{\omega}'=2\tilde{\omega}\tau。$$

記 $\lambda=\frac{\tilde{\omega}}{\omega}=\frac{\tilde{\omega}'}{\omega'}$，考察函數

$$f(u)=\frac{\lambda^2}{\mathrm{sn}^2(\lambda u)}。$$

因 $\lambda 2\omega=2\tilde{\omega}$，$\lambda 2\omega'=2\tilde{\omega}'$，由(133)表知函數 $f(u)$ 以 2ω 和 $2\omega'$ 爲週期。由(134)表知 $f(u)$ 的極點爲 $n2\omega+n'2\omega'$，其中 n 和 n' 是任意整數。

這樣，函數 $f(u)$ 就和函數 $\wp(u)$ 一樣以 2ω 和 $2\omega'$ 爲週期，且在基本週期平行四邊形中有唯一的二階極點 $u=0$。現在證明 $f(u)$ 在這極點的無限部分也和 $\wp(u)$ 一樣等於 $\frac{1}{u^2}$。實際上，因爲 $\mathrm{sn}(u)$ 是奇函數，由(132)式知道他在 $u=0$ 的鄰近可以展開爲

$$\mathrm{sn}(u)=u+c_3u^3+c_5u^5+\cdots,$$

從而

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2(u)}=\frac{1}{u^2}\cdot\frac{1}{(1+c_3u^2+c_5u^4+\cdots)^2}=\frac{1}{u^2}+d_0+d_2u^2+\cdots,$$

故在 $u=0$ 鄰近

$$f(u)=\frac{\lambda^2}{\mathrm{sn}^2(\lambda u)}=\frac{1}{u^2}+\lambda^2d_0+\lambda^4d_2u^2+\cdots,$$

這就是我們所要證明的。因此，函數 $f(u)$ 和函數 $\wp(u)$ 在週期平行四邊形中有相同的極點以及相同的無限部分，所以他們只差一個常數項，卽

$$(145)\qquad \wp(u)=\frac{\lambda^2}{\operatorname{sn}^2(\lambda u)}+C。$$

要決定常數 C 可令 $u=\omega$。這時 $\wp(\omega)=e_1$，由(133)表

$$\operatorname{sn}(\lambda\omega)=\operatorname{sn}(\tilde{\omega})=\frac{\operatorname{cn}(0)}{\operatorname{dn}(0)}=1,$$

代入(145)式，得

$$(146)\qquad C=e_1-\lambda^2。$$

由(143)和(144)，可寫

$$2\tilde{\omega}=2\omega\sqrt{e_1-e_3};\quad 2\tilde{\omega}'=2\omega'\sqrt{e_1-e_3},$$

卽

$$\lambda=\frac{\tilde{\omega}}{\omega}=\frac{\tilde{\omega}'}{\omega'}=\sqrt{e_1-e_3},$$

代入(146)式，得 $C=e_3$。

應用等式(143)和(114)，可將常數 C 寫成

$$C=-\frac{(1+k^2)\lambda^2}{3}。$$

最後得到下面的聯繫函數 $\wp(u)$ 和 $\operatorname{sn}(u)$ 的關係式；

$$(147)\qquad \wp(u)=\frac{e_1-e_3}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1-e_3}\,u)}+e_3$$

或

$$(148)\qquad \wp(u)=\frac{\lambda^2}{\operatorname{sn}^2(\lambda u)}-\frac{(1+k^2)\lambda^2}{3}\qquad(\lambda=\sqrt{e_1-e_3})。$$

184．橢圓坐標 在力學問題中最常用到橢圓函數。現在祇講這種函數的一些最基本最簡單的應用。第一是橢圓函數在研究空間橢圓坐標時的應用。我們在[II, 137]中已經遇到過橢圓坐標了。現在我們把一些要用到的東西再重複一下，並且再講一點補充性質。把從前用過的記號改變一下，卽改 a^2, b^2 和 c^2 爲 $-a^2$, $-b^2$ 和 $-c^2$。寫出方程：

$$(149)\qquad \frac{x^2}{\rho-a^2}+\frac{y^2}{\rho-b^2}+\frac{z^2}{\rho-c^2}-1=0。$$

這是一個關於 ρ 的三次方程。對於空間任一坐標爲 (x, y, z) 的點方程(149)有三個實

根：λ，μ 和 ν，滿足不等式

(150)
$$\lambda > a^2 > \mu > b^2 > \nu > c^2。$$

這三個數稱爲該點的橢圓坐標。爲了避免出現等號，我們假設 x, y 和 z 都不等於零，例如，設 x, y 和 z 都是正的。若於方程(149)中置 $\rho=\lambda$，則得一橢圓面，經過已給的點；置 $\rho=\mu$，得一單葉雙曲面；置 $\rho=\nu$，得一雙葉雙曲面。我們從前知道坐標曲面 $\lambda=$常數，$\mu=$常數和 $\nu=$常數各各互相正交，就是說，橢圓坐標是正交坐標。現在要導出將直角坐標表示爲橢圓坐標的公式。將方程(149)的左邊通分，注意分子應是 ρ 的三次多項式，最高次項的係數是 (-1)，三個零點是 λ, μ 和 ν，則得關於 ρ 的恆等式

(151)
$$\frac{x^2}{\rho-a^2}+\frac{y^2}{\rho-b^2}+\frac{z^2}{\rho-c^2}-1=\frac{-(\rho-\lambda)(\rho-\mu)(\rho-\nu)}{(\rho-a^2)(\rho-b^2)(\rho-c^2)},$$

以 $(\rho-c^2)$ 乘等式兩邊，然後令 $\rho=a^2$，卽得 x^2 的表示式，同樣方法可得 y^2 和 z^2 的表示式：

(152)
$$\begin{cases} x^2=\dfrac{(\lambda-a^2)(\mu-a^2)(\nu-a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \\ y^2=\dfrac{(\lambda-b^2)(\mu-b^2)(\nu-b^2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)} \\ z^2=\dfrac{(\lambda-c^2)(\mu-c^2)(\nu-c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \end{cases}$$

現在要導出橢圓坐標下弧長元的平方的公式。將(152)各式分別取對數再微分，卽得

$$2\frac{dx}{x}=\frac{d\lambda}{\lambda-a^2}+\frac{d\mu}{\mu-a^2}+\frac{d\nu}{\nu-a^2}$$
$$2\frac{dy}{y}=\frac{d\lambda}{\lambda-b^2}+\frac{d\mu}{\mu-b^2}+\frac{d\nu}{\nu-b^2}$$
$$2\frac{dz}{z}=\frac{d\lambda}{\lambda-c^2}+\frac{d\mu}{\mu-c^2}+\frac{d\nu}{\nu-c^2}。$$

依次以 x, y 和 z 乘上三式，平方相加，卽得

(153)
$$ds^2=L^2d\lambda^2+M^2d\mu^2+N^2d\nu^2$$

其中，例如

(154)
$$4L^2=\frac{x^2}{(\lambda-a^2)^2}+\frac{y^2}{(\lambda-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\lambda-c^2)^2}。$$

注意：(153)式的右邊不應含有 $d\lambda\, d\mu$ 等形式的乘積，因爲橢圓坐標是正交坐標的緣故[II, 130]。(154)式的右邊現在可以這樣改寫：關於 ρ 微分恆等式(151)，變號，然後再置 $\rho=\lambda$，卽得

$$4L^2=\frac{d}{d\rho}\left.\frac{(\rho-\lambda)(\rho-\mu)(\rho-\nu)}{(\rho-a^2)(\rho-b^2)(\rho-c^2)}\right|_{\rho=\lambda}。$$

關於 ds^2 的公式就可改寫爲：

(155)
$$4ds^2=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(\lambda-a^2)(\lambda-b^2)(\lambda-c^2)}d\lambda^2+\frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{(\mu-a^2)(\mu-b^2)(\mu-c^2)}d\mu^2+$$
$$+\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(\nu-a^2)(\nu-b^2)(\nu-c^2)}d\nu^2。$$

已經知道了弧單元的表示式以後我們可以寫出橢圓坐標下的拉普拉斯方程[II, 119]。爲簡便計引進下面的記號

$$f(\rho)=(\rho-a^2)(\rho-b^2)(\rho-c^2)。$$

由[II, 119]的記號,有

$$2H_1=\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{f(\lambda)}};\quad 2H_2=\sqrt{\frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{f(\mu)}};\quad 2H_3=\sqrt{\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{f(\nu)}},$$

其中諸 H_k 應取正值,又要記住 $f(\lambda)$ 和 $f(\nu)$ 是正的,而 $f(\mu)<0$。在橢圓坐標下的拉普拉斯方程就是:

$$\frac{\nu-\mu}{\sqrt{f(\mu)f(\nu)}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{f(\lambda)}\frac{\partial U}{\partial\lambda}\right)+\frac{\lambda-\nu}{\sqrt{f(\nu)f(\lambda)}}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{f(\mu)}\frac{\partial U}{\partial\mu}\right)+\frac{\mu-\lambda}{\sqrt{f(\lambda)f(\mu)}}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sqrt{f(\nu)}\frac{\partial U}{\partial\nu}\right)=0, \tag{156}$$

其中後二項可以由前一項經過關於 λ, μ 和 ν 的輪換而得。

185. 橢圓函數的導入 現在由下列公式導入新的變數 α, β 和 γ 以替代原來的變數 λ, μ 和 ν:

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}=d\alpha;\quad \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}=d\beta;\quad \frac{d\nu}{\sqrt{f(\nu)}}=d\gamma, \tag{157}$$

就是說,α, β 和 γ 可以依次藉 λ, μ 和 ν 表示爲第一類橢圓積分的形式,反過來,後者則爲前者的橢圓函數。又由(157)知有

$$\sqrt{f(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}=\frac{\partial}{\partial\alpha}$$

等三式,從而(156)式就可以改寫爲:

$$(\nu-\mu)\frac{\partial^2U}{\partial\alpha^2}+(\lambda-\nu)\frac{\partial^2U}{\partial\beta^2}+(\mu-\lambda)\frac{\partial^2U}{\partial\gamma^2}=0。 \tag{158}$$

現在回到(152)式,我們要證明 x, y 和 z 是新的變數 α, β 和 γ 的單值函數。實際上,考察(157)中出現的根號

$$\sqrt{f(\rho)}=\sqrt{(\rho-a^2)(\rho-b^2)(\rho-c^2)},$$

由

$$\rho=p+qt$$

引進變數 t 以代 ρ,其中 p 和 q 是常數。我們有

$$(\rho-a^2)(\rho-b^2)(\rho-c^2)=q^3(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3),$$

其中 e_k 是關於 t 的三次式的零點。比較係數,得

$$a^2=p+qe_1;\quad b^2=p+qe_2;\quad c^2=p+qe_3。$$

首先,選取常數 p,使得

$$e_1+e_2+e_3=0。$$

易知應有

$$p=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}。$$

這樣一來，諸數 e_k 除了一個常數因子 q 以外可以完全決定。假設這因子是正的，記爲 s^2，於是有

$$(159)\qquad \begin{cases} s^2e_1=a^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \\ s^2e_2=b^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \\ s^2e_3=c^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \end{cases}$$

由此可得

$$(160)\qquad a^2-b^2=s^2(e_1-e_2);\quad a^2-c^2=s^2(e_1-e_3);\quad b^2-c^2=s^2(e_2-e_3)。$$

又由 $\rho=p+qt$ 和以前的三個式子相減可得：

$$\rho-a^2=s^2(t-e_1);\quad \rho-b^2=s^2(t-e_2);\quad \rho-c^2=s^2(t-e_3)。$$

在新的變數之下多項式 $f(\rho)$ 可以寫成：

$$f(\rho)=s^6(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)。$$

置

$$(161)\qquad \lambda=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+s^2t,$$

將(157)的第一式積分，得

$$\frac{2}{s}\int_\infty^t\frac{dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}=\alpha,$$

其中等式右邊略去一個不關緊要的任意常數項。

爲書寫簡單計置 $s=2$，將上積分反演即得 $t=\wp(\alpha)$，因爲由 $e_1+e_2+e_3=0$ 知道根號中的多項式有和[178]中同樣的形式。

將 $t=\wp(\alpha)$ 代入(161)式，得

$$(162)\qquad \lambda=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+4\wp(\alpha),$$

同樣可得

$$(163)\qquad \mu=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+4\wp(\beta);\quad \nu=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+4\wp(\gamma)。$$

將 (159)，(160)，(162) 和 (163) 四式代入 (152) 式，得

$$(164)\qquad \begin{cases} x^2=4\dfrac{[\wp(\alpha)-e_1][\wp(\beta)-e_1][\wp(\gamma)-e_1]}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)} \\ y^2=4\dfrac{[\wp(\alpha)-e_2][\wp(\beta)-e_2][\wp(\gamma)-e_2]}{(e_2-e_3)(e_2-e_1)} \\ z^2=4\dfrac{[\wp(\alpha)-e_3][\wp(\beta)-e_3][\wp(\gamma)-e_3]}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)} \end{cases}$$

以上各式中分子內每一因子都是 α，β 或 γ 的單值函數的完全平方 [170]，因此這些式子就定義 x，y 和 z 爲 α，β 和 γ 的單值解析函數。由(162)和(163)知在新的變數下拉普拉

斯方程改爲：

$$[\wp(\gamma)-\wp(\beta)]\frac{\partial^2U}{\partial\alpha^2}+[\wp(\alpha)-\wp(\gamma)]\frac{\partial^2U}{\partial\beta^2}+[\wp(\beta)-\wp(\alpha)]\frac{\partial^2U}{\partial\gamma^2}=0。\tag{165}$$

136．來梅方程　對拉普拉斯方程(165)應用通常的分離變數法，並要求其形式如

$$U=A(\alpha)B(\beta)C(\gamma)\tag{166}$$

的解，其中 $A(\alpha)$ 祇是 α 的函數，$B(\beta)$ 祇是 β 的函數，$C(\gamma)$ 祇是 γ 的函數。代入(165)式，再以 $A(\alpha)B(\beta)C(\gamma)$ 除之，得：

$$[\wp(\gamma)-\wp(\beta)]\frac{A''(\alpha)}{A(\alpha)}+[\wp(\alpha)-\wp(\gamma)]\frac{B''(\beta)}{B(\beta)}+[\wp(\beta)-\wp(\alpha)]\frac{C''(\gamma)}{C(\gamma)}=0。$$

易知若(166)中的三個函數都滿足同一個二階微分方程，即：

$$\frac{A''(\alpha)}{A(\alpha)}=-a\wp(\alpha)-b;\quad \frac{B''(\beta)}{B(\beta)}=-a\wp(\beta)-b;\quad \frac{C''(\gamma)}{C(\gamma)}=-a\wp(\gamma)-b,$$

則(166)顯然爲(165)的解。爲此，我們考察係數爲雙重週期函數的二階微分方程

$$\frac{d^2R(u)}{du^2}+[a\wp(u)+b]R(u)=0。\tag{167}$$

首先，我們要決定常數 a，使得方程(176)的一般解是 u 的單值函數。在 $u=0$ 的鄰近係數 $a\wp(u)+b$ 可以展開爲

$$\frac{a}{u^2}+b+\cdots,$$

因此在這正則奇異點的判定方程是

$$\rho(\rho-1)+a=0。\tag{168}$$

要得到單值解必需這方程的根是整數。因這方程兩根的和等於 $+1$，所以他的根應是 $-n$ 和 $n+1$，其中 n 是正整數或零。這樣，常數 a 的可能值應該是：

$$a_n=-n(n+1)。\qquad (n=0,\ 1,\ 2\cdots)\tag{169}$$

嚴格說來，以上我們只證明了等式(169)是一般解爲單值的必要條件。現在證明他也是充分條件。由微分方程的一般理論知道當 $a=-n(n+1)$ 時方程(167)的一個解在原點的附近可以展開爲

$$R(u)=u^{n+1}(c_0+c_1u+c_2u^2+\cdots)。\qquad (c_0\neq0)\tag{170}$$

但是當我們改 u 爲 $(-u)$ 時方程(167)不變，故知若改(170)中的 u 爲 $(-u)$，所得仍是(167)的解。這樣得到的解應該和解(170)祇差一個常數因子，因爲和(170)互爲線性獨立的方程(167)的另一解在 $u=0$ 的附近具有完全不同的另外形式。由此推斷可知(170)式中的冪級數應祇含 u 的偶次冪，即

$$R_1(u)=u^{n+1}(c_0+c_2u^2+c_4u^4+\cdots)。\qquad (c_0\neq0)\tag{171}$$

如我們所已知，方程(167)的第二個解可以由下式得到［II, 24］

$$R_2(u)=R_1(u)\int\frac{du}{R_1^2(u)},$$

或
$$R_2(u)=R_1(u)\int\frac{1}{u^{2n+2}}(c_0+c_2u^2+c_4u^4+\cdots)^{-2}du\text{。}$$

被積分函數在 $u=0$ 的附近的展開式祇包含 u 的偶次冪，故沒有含 u^{-1} 的項，從而$R_2(u)$中不含 $\lg u$。因此方程(167)的兩個獨立解在 $u=0$ 的附近均爲單值。以上的論證可以完全同樣地應用於方程(167)的任一奇異點。這些奇異點是 $u=m_1\omega_1+m_2\omega_2$，其中 ω_1 和 ω_2 是 $\wp(u)$的週期，m_1 和 m_2 是任意整數。這樣，方程(167)的任一解在方程的奇異點祇可能有極點，所以確是 u 的單値函數。

將(169)式中的常數的値代入方程(167)，得

$$\frac{d^2R(u)}{du^2}+[-n(n+1)\wp(u)+b]R(u)=0, \tag{172}$$

通常稱爲來梅方程。常數 b 應如此決定，使得方程(172)的解或爲 $\wp(u)$ 的多項式，或爲這種多項式和下列形式的函數的乘積：

$$\sqrt{\wp(u)-e_1};\ \sqrt{\wp(u)-e_2};\ \sqrt{\wp(u)-e_3};$$

這種形式的因子可能有一個，兩個或三個。可以證明滿足這種條件的常數 b 的數値有$(2n+1)$個。若 $R_0(u)$ 是這樣的方程(172)的解，則可證拉普拉斯方程的解

$$R_0(\alpha)R_0(\beta)R_0(\gamma)$$

是直角坐標 x, y 和 z 的 n 次多項式。對於固定的 n，這種解有 $(2n+1)$ 個，通常稱爲來梅函數。這些多項式顯然和我們從前講過的球函數有密切的關係。

157．單擺 單擺運動的研究可以作爲夏可皮函數的應用的一個最簡單的例子。假設有單位質量的沉重質點沿着光滑的圓周運動。取坐標的 X 和 Z 軸在圓周所在的平面中，圓心爲原點，Z 軸垂直向上，設 l 爲圓的半徑。當 $t=0$ 時質點從最低點 $M_0(z=-l)$ 以初速 v_0 出發。因爲動能的增加等於重力所作之功，故得：

$$\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}v_0^2=-gz-gl$$

或

$$v^2=2g(a-z)\text{。} \tag{173}$$

$$\left(a=-l+\frac{v_0^2}{2g}\right)$$

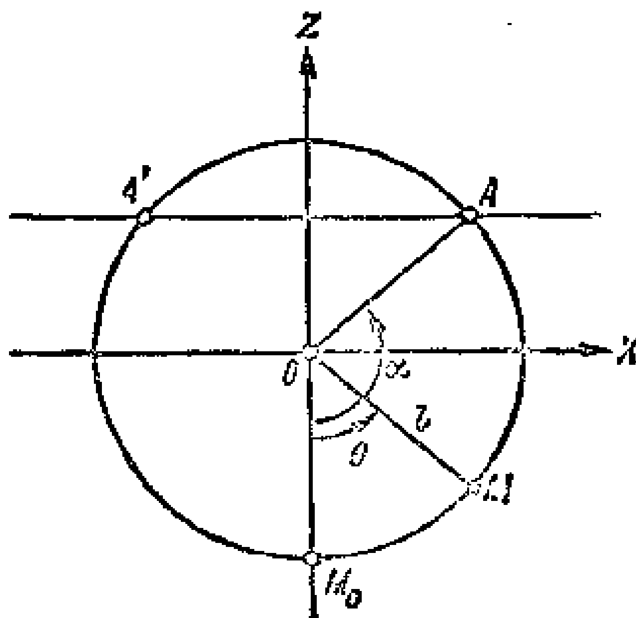


圖 85

又設直線 $z=a$ 和圓周交於兩點 A 和 A'，即 $a<l$ 或 $v_0<2\sqrt{lg}$。由(173)式知道應有 $z\leqslant a$，即運動應限於圓周上的 AM_0A' 弧上（圖 85）。我們有 $z=-l\cos\theta$，設 $a=-l\cos\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$。因速度

$$v=\frac{ds}{dt}=l\left|\frac{d\theta}{dt}\right|,$$

從而方程(173)可以改寫爲

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2gl(\cos\theta-\cos\alpha)$$

或由半角公式：

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=4g\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

從而

$$2\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt=\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}。\tag{174}$$

這裏我們假設當 t 增加時 θ 也增加。由

$$\sin\frac{\theta}{2}=\tau\sin\frac{\alpha}{2}$$

引進新的變數 τ 以代 θ，將這關係式微分，得到

$$d\theta=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}d\tau=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}}d\tau,$$

即

$$d\theta=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-\tau^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}d\tau,$$

代入(174)式，記住當 $t=0$ 時 $\theta=\tau=0$：

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t=\int_0^\tau\frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}},\qquad\left(k^2=\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

從而

$$\tau=\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right),\tag{175}$$

應用夏可皮函數已知的性質，有：

$$\begin{cases}\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)=k\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)\\ \cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)}=\operatorname{dn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right),\end{cases}\tag{176}$$

其中平方根取正號，因爲 $t=0$ 時應有 $\theta=0$。由上二式可以把質點的坐標 x 和 z 表示爲 t 的單值函數。

現在再看(173)式中的常數 a 大於 l 的情形。我們可以改寫該式爲：

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2g(a+l\cos\theta)=2g\left(a+l-2l\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

或

(177) $$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2g(a+l)\left(1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

其中

(178) $$k^2=\frac{2l}{a+l},$$

顯然有 $k^2<1$。將(177)式積分，得

$$\lambda t=\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}},$$

其中 $$\lambda=\frac{\sqrt{2g(a+l)}}{l}。$$

引進新的變數 $\tau=\sin\frac{\theta}{2}$ 以代 θ，得：

$$\lambda t=\int_0^\tau\frac{2d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}},$$

從而 $$\tau=\sin\frac{\theta}{2}=\mathrm{sn}\left(\frac{1}{2}\lambda t\right),$$

同樣可得： $$\cos\theta=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{2}\lambda t\right)}=\mathrm{cn}\left(\frac{1}{2}\lambda t\right)。$$

即使在這情形之下由這些公式仍可將坐標表示爲時間的單值函數。

188. 保角變換的例子 我們從前知道當 $0<k<1$ 時函數

(179) $$u=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

將上半 z 平面變爲 u 平面中的長方形，因此反函數 $z=\mathrm{sn}(u;\ k)$ 就將長方形變爲上半平面。長方形的邊長由積分：

$$2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\quad 和\quad \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

所決定 [167]，其中 $k^2+k'^2=1$。因此長方形的邊長之比可以是任意的。給(179)式的右邊添上一個常數因子 $\frac{1}{\lambda}$，可以得到任意邊長的長方形，而 $z=\mathrm{sn}(\lambda u;\ k)$ 則將這長方形變爲半平面。現在要證明變長方形爲圓的函數可以用維爾史特拉斯函數 $\sigma(u)$ 來表示。在平面上任取一長方形 K_1，其頂點的坐標爲 $(0,0)$，$(a,0)$，(a,b) 和 $(0,b)$。假設函數 $z=f(u)$ 變 K_1 爲單位圓，變 K_1 內部的一點 (ξ,η) 爲圓心。若將 $f(u)$ 越過聯結 $(0,0)$ 和 $(a,0)$ 的邊解析延拓出去，則由對稱原理，$f(u)$ 變另一長方形 K_2 爲單位圓的外部，K_2 和 K_1 關於上述一邊爲對稱。單位圓的外部即區域 $|z|>1$，K_2 中和 (ξ,η) 對稱的點 $(\xi,-\eta)$ 變爲這區域中的無限遠點。由於反射的單葉性可知 $f(u)$ 以 $\xi+i\eta$ 爲單零點，以 $\xi-i\eta$ 爲單極點。如果我們

再作兩長方形 K_3 和 K_4，依次和 K_1，K_2 關於虛軸爲對稱，那末 K_3 將被 $f(u)$ 變爲區域 $|z|>1$，而 K_3 將被 $f(u)$ 變爲區域 $|z|<1$，同時 $z=-\xi-i\eta$ 將是 $f(u)$ 的單零點。$z=-\xi+i\eta$ 將是 $f(u)$ 的單極點。

和[167]中完全一樣可以證明 $f(u)$ 是個以 $2a$ 和 $2bi$ 爲週期的橢圓函數，基本週期平行四邊形(長方形)是由上述四個長方形所組成，前面說過的那些零點和極點就是 $f(u)$ 在週期平行四邊形中零點和極點的全部。

設 $\omega_1=2a$，$\omega_2=2bi$，作維爾史特拉斯函數 $\sigma(u)$ 以及另一函數

$$\varphi(u)=\frac{\sigma(u-\xi-i\eta)\sigma(u+\xi+i\eta)}{\sigma(u-\xi+i\eta)\sigma(u+\xi-i\eta)}。\tag{180}$$

在上述週期平行四邊形中他有和 $f(u)$ 同樣的單零點和單極點。現在要證這函數也以 ω_1 和 ω_2 爲週期，從而 $\varphi(u)$ 和 $f(u)$ 將祇差一個常數因子。應用(49)式所示函數 $\sigma(u)$ 的性質，可寫

$$\varphi(u+\omega_k)=\frac{e^{\eta_k\left(u-\xi-i\eta-\frac{\omega_k}{2}\right)+\eta_k\left(u+\xi+i\eta+\frac{\omega_k}{2}\right)}\sigma(u-\xi-i\eta)\sigma(u+\xi+i\eta)}{e^{\eta_k\left(u-\xi+i\eta+\frac{\omega_k}{2}\right)+\eta_k\left(u+\xi-i\eta+\frac{\omega_k}{2}\right)}\sigma(u-\xi+i\eta)\sigma(u+\xi-i\eta)}=$$

$$=\frac{\sigma(u-\xi-i\eta)\sigma(u+\xi+i\eta)}{\sigma(u-\xi+i\eta)\sigma(\xi+u-i\eta)}=\varphi(u),\qquad (k=1,2)$$

這就是我們所要證明的。因此

$$f(u)=C\frac{\sigma(u+\xi+i\eta)\sigma(u-\xi-i\eta)}{\sigma(u-\xi+i\eta)\sigma(u+\xi-i\eta)}。$$

要決定常數 C 可令 $u=0$，改寫上式爲

$$f(0)=C\frac{\sigma(-\xi-i\eta)}{\sigma(-\xi+i\eta)}\cdot\frac{\sigma(\xi+i\eta)}{\sigma(\xi-i\eta)}。\tag{181}$$

由函數 $\sigma(u)$ 的定義

$$\sigma(u)=u\prod_{m_1,m_2}'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2},$$

其中 $w=m_1 2a+m_2 2bi$。假設 u 是實的。因爲乘積展佈於所有 m_1 和 m_2 的整數值除了 $m_1=m_2=0$ 以外，故可將其中每兩因子，對應於同一 m_1 而符號相反的 m_2 者，先合併起來，若 $m_2=0$，則對應的因子是實的。

因此在這樣的情形之下，卽當 ω_1 爲實數而 ω_2 爲純虛數時，對於實數 u 函數 $\sigma(u)$ 常取實值。由對稱原理，對於 u 的共軛值函數 $\sigma(u)$ 的值亦爲共軛。因此知道 (181) 式右邊每一分數的分子和分母是共軛的，從而每一分數的絕對值都等於 1。再看該式的左邊。$u=0$ 是基本長方形 K_1 的頂點，位於長方形的周界上，所以 $f(0)$ 位於單位圓周上，卽 $|f(0)|=1$。由(181)式知 $|C|=1$，卽 $C=e^{i\theta}$，其中 θ 是個實數。最後卽得變長方形 K_1 爲單位圓的函數

$$f(u)=e^{i\theta}\frac{\sigma(u-\xi-i\eta)\sigma(u+\xi+i\eta)}{\sigma(u-\xi+i\eta)\sigma(u+\xi-i\eta)}。\tag{182}$$

θ 的選取不關重要，其值變更時單位圓繞着圓心轉動一個角度。

附錄　方陣的歸範形式

189. 預備知識　這附錄的目的是要證明我們在[III₁, 27]中提到過而沒有證明的一個命題。首先，讓我們寫出這個命題。假設 A 是一個方陣，那末常可找到一個行列式不等於零的方陣 V 使得方陣 VAV^{-1} 和 A 相似，且有擬對角線(或對角線)方陣的形式

$$(1)\qquad VAV^{-1}=[I_{\rho_1}(\lambda_1),\ I_{\rho_2}(\lambda_2),\cdots,I_{\rho_p}(\lambda_p)],$$

其中方陣 $I_\rho(\lambda)$ 的形式如下

$$(2)\qquad I_\rho(\lambda)=\begin{Vmatrix}\lambda, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 0\\ 1, & \lambda, & 0, & \cdots, & 0, & 0\\ 0, & 1, & \lambda, & \cdots, & 0, & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & \lambda, & 0\\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & 1, & \lambda\end{Vmatrix}$$

足號 ρ 表示方陣的階數，λ 是主對角線上的元素。若 $\rho=1$，則方陣 $I_1(\lambda)$ 退化爲一數 λ。證明了這命題以後，我們再在若干主要之處與以補充。

首先，讓我們回憶一下相似方陣的幾何意義。n 階方陣 A 可以視爲 n 維空間中的一種運算，他使得這空間經過一次線性變換。由[III₁, 21]我們知道方陣 A 的形式繫於坐標，即基本骨架，的選取。設 A 代表某一定坐標系統下的一個線性變換，又設將空間經過一個坐標變換，使得每一向量的各個新支量可以由他的各個舊支量藉變換 V 而得到，那末在新坐標系統下我們的線性變換該由方陣 VAV^{-1} 來代表。這樣，基本上說來，我們前面的問題就歸結到，對於舊坐標系統下由方陣 A 所代表的線性變換要選一個最適當的坐標系統，就是要選取一個坐標系統，使得我們的線性變換在這坐標系統下可以用形式如(1)式右邊的方陣來代表。

在解決這個問題之先我們先講一點以後要用到的預備知識。其中大部分是我們從前講過的,但是為了完備起見,把他們都聚集在一起。

首先,說明我們以前常用到的子空間的概念。設 $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k$ 是空間 k 個線性獨立的向量,其中 $k<n$, 那末由

$$c_1\vec{x}_1+\cdots+c_k\vec{x}_k \tag{3}$$

所決定的向量的全體,其中 c_s 是些任意常數,稱為由這 k 個向量所決定的 k 維子空間。還可以給一個與此相抵的子空間的定義。即:子空間是滿足下列兩個條件的向量全體所成的集合:如果某一向量 $\vec{x}$ 屬於這集合,那末對於任一常數 c, 向量 $c\vec{x}$ 也屬於這集合,如果兩向量 $\vec{x}_1$ 和 $\vec{x}_2$ 都屬於這集合,那末他們的和 $\vec{x}_1+\vec{x}_2$ 也屬於這集合。換言之,以數字乘這集合中的向量或將集合中兩向量相加,結果仍舊得到這集合中的向量。

以後我們要用到下列兩種定義子空間的方法。設 P 為一 n 階方陣, $\vec{x}$ 是 n 維空間中任一變向量。由公式

$$\vec{\xi}=P\vec{x} \tag{4}$$

所決定的向量的全體顯然成一子空間,他有時可以等於全空間。實際上,若某一向量 $\vec{\xi}_1=P\vec{x}_1$ 屬於這集合,則向量 $c_1\vec{\xi}_1=P(c_1\vec{x}_1)$ 也屬於這集合,若兩向量 $\vec{\xi}_1=P\vec{x}_1$ 和 $\vec{\xi}_2=P\vec{x}_2$ 屬於這集合,則其和 $\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2=P(\vec{x}_1+$ $+\vec{x}_2)$ 顯然也屬於這集合,因此,當 $\vec{x}$ 任意變動時,由(4)所決定的向量全體確為一子空間。如我們所知[III$_1$, 16],這子空間的維數等於方陣 P 的秩數。

現在再講第二種定義子空間的方法。設 Q 是個 n 階方陣,考察滿足方程

$$Q\vec{x}=0 \tag{5}$$

的向量的全體。和前面完全一樣可以證明這向量的集合是一個子空間。如[III$_1$, 14]所知,這是一個 k 維的子空間,如果方陣 Q 的秩數等於 $n-k$ 的話。

說到子空間時我們當然假設這個向量的集合不是空集，就是說，他的確包含不爲零的向量。現在要看在什麼情形下（4）式決定一個空的向量集合，就是要問在什麼時候，對於空間中任一向量 x，由（4）式所得到的常爲零向量。由線性變換的形式易知當且僅當 P 爲零方陣時，即其每一元素都等於零時，上面的事實才能成立。

假設 $E_1, \cdots, E_m$ 是一些子空間。我們稱這爲一套完全的子空間系統，如果空間任一向量 $\vec{x}$ 常可用唯一的方法表示爲向量之和

$$\vec{x}=\vec{\xi}_1+\cdots+\vec{\xi}_m, \tag{6}$$

其中 $\vec{\xi}_i$ 屬於子空間 E_i。注意表示法的唯一性這條件的重要意義。由這條件立刻可以知道零向量不能表示爲形式如（6）的和，使其中有些 $\vec{\xi}_i$ 是非零向量。而這就說明一件事實，即上述諸子空間中的向量不能互爲線性相關。試以原點爲 O 的實三維空間爲例。我們可以取任一通過 O 的平面 L 和任一通過 O 而不在平面 L 內的直線 l 作爲完全的子空間系統，第一個子空間是個二維空間，可以由 L 中任二不在同一直線上的向量產生。第二個子空間是一維空間，可以由直線 l 上的任一向量產生。三維空間中的任一向量可以唯一地表示爲平面 L 中的向量與直線 l 上的向量的和。

假設 A 是一個方陣，代表空間一線性變換。又設我們已經找到一套完全子空間系統 $E_1, \cdots, E_m$，依次爲 $\rho_1, \cdots, \rho_m$ 維空間，使得每一子空間在線性變換 A 之下皆爲不變，換言之，即子空間 $E_i(i=1,2,\cdots,m)$ 中任一向量經過線性變換 A 以後仍舊屬於這個空間。這時我們自然就可以按照下法選取坐標系統，使得在這樣的坐標系統下方陣 A 具有結構爲 $\{\rho_1, \cdots, \rho_m\}$ 的擬對角線方陣的形式：先取子空間 E_1 中 ρ_1 條互爲線性獨立的向量作爲最先 ρ_1 條坐標軸，然後再取子空間 E_2 中 ρ_2 條互爲線性獨立的向量作爲其次的 ρ_2 條坐標軸，其餘類推。既然諸子空間 E_i 作成一套完全子空間系統，顯然就有 $\rho_1+\cdots+\rho_m=n$。不難知道，在這樣的坐標系統之下，方陣 A 確具擬對角線方陣的形式。爲簡單起見，

取 $m=2$ 的情形再詳細說明一下。設 $(x_1, \cdots, x_n)$ 爲一向量，經過我們的線性變換以後他變爲向量 $(x'_1, \cdots, x'_n)$。由於子空間 E_1 的不變性以及其中已選定的坐標系統，當 $x_{p_1+1}=x_{p_1+2}=\cdots=x_n=0$ 時應有 $x'_{p_1+1}=x'_{p_1+2}=\cdots=x'_n=0$。同樣，由於 E_2 的不變性，當 $x_1=\cdots=x_{p_1}=0$ 時應有 $x'_1=\cdots=x'_{p_1}=0$。由此立刻可知，在如此選定的坐標系統下，我們的線性變換可由下之擬對角線方陣來代表

$$
(7)\qquad \left\|\begin{matrix}
a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1p_1}, & 0, & 0, & \cdots, & 0\\
a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2p_1}, & 0, & 0, & \cdots, & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{p_11}, & a_{p_12}, & \cdots, & a_{p_1p_1}, & 0, & 0, & \cdots, & 0\\
0, & 0, & \cdots, & 0, & b_{11}, & b_{12}, & \cdots, & b_{1p_2}\\
0, & 0, & \cdots, & 0, & b_{21}, & b_{22}, & \cdots, & b_{2p_2}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0, & 0, & \cdots, & 0, & b_{p_21}, & b_{p_22}, & \cdots, & b_{p_2p_2}
\end{matrix}\right\| = [A', B']。
$$

還要注意：每一子空間中坐標軸的選取仍是任意的，以後我們就要利用這種任意性適當地選取坐標軸使得方陣 (7) 中的兩小方陣 A' 和 B' 具有在某種意義之下可稱爲最簡單的形式。

現在我們要講到下面的一個在以後非常有用的命題，

設 $f(z)$ 是一個多項式

$$f(z)=a_0z^p+a_1z^{p-1}+\cdots+a_{p-1}z+a_p。$$

以一方陣 A 代 z，得到方陣多項式

$$(8)\qquad f(A)=a_0A^p+a_1A^{p-1}+\cdots+a_{p-1}A+a_p。$$

等式右邊各項經過運算以後得到一個新的方陣，就是說，任一方陣多項式 $f(A)$ 仍爲一方陣。注意：多項式的係數 a_r 都是數字。因爲同一方陣 A 的正整數冪 A^k 和任何的數相乘時與先後次序無關，易知不但是方陣多項式間的加法，而且同一方陣的多項式間的乘法也可以像通常數字變數的多項式的加法和乘法一樣地演算。因此，如果我們有一個聯繫若干數字變數的多項式的恆等式，其中只含加法和乘法兩種運

算，那末以任一方陣 A 代替其中的變數 z，立刻就得到一個關於方陣A的恆等式了。

特徵方程

$$(9)\qquad \varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

在化方陣爲歸範形式的問題中有基本的重要性，其中 a_{ik} 是方陣 A 的元素。這方程可以寫成

$$(10)\qquad D(A-\lambda)=0,$$

其中 $D(U)$ 表示方陣 U 的行列式。如 [90] 中所知，成立下面的開雷恆等式：

$$(11)\qquad \varphi(A)=0,$$

就是說，若以方陣 A 代替他的特徵多項式 $\varphi(\lambda)$ 中的 λ，則所得爲零方陣。

我們還要提到兩個簡單的命題。大家知道方程(9)的根稱爲方陣 A 的特徵數。現在要證明：若方陣 A 的特徵數爲 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，則對任一正整數 s，方陣 A^s 的特徵數爲 $\lambda_1^s, \cdots, \lambda_n^s$。

注意多項式 $\varphi(\lambda)$ 的最高次項等於 $(-\lambda)^n$，可得關於 λ 的恆等式：

$$(12)\qquad D(A-\lambda)=\prod_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda)。$$

設 $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{s}}$ 爲1的 s 次根，則顯然成立恆等式 [I, 175]：

$$(13)\qquad (z-\lambda)(z-\varepsilon\lambda)\cdots(z-\varepsilon^{s-1}\lambda)=z^s-\lambda^s。$$

因爲方陣乘積的行列式等於諸方陣的行列式的乘積，由(12)和(13)有

$$D(A^s-\lambda^s)=\prod_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda)\prod_{k=1}^{n}(\lambda_k-\varepsilon\lambda)\cdots\prod_{k=1}^{n}(\lambda_k-\varepsilon^{s-1}\lambda)$$

或

$$D(A^s-\lambda^s)=\prod_{k=1}^{n}[(\lambda_k-\lambda)(\lambda_k-\varepsilon\lambda)\cdots(\lambda_k-\varepsilon^{s-1}\lambda)]。$$